Balla Éva –
Herendiné Kónya Eszter – Paulovits György

A középiskolai matematikatanítás elméleti és gyakorlati kérdései

SZAKTÁRNET

DEBRECENI EGYETEM
TANÁRKÉPZÉSI KÖZPONT

A középiskolai matematikatanítás elméleti és gyakorlati kérdései

BALLA ÉVA
HERENDINÉ KÓNYA ESZTER
PAULOVITS GYÖRGY

Debreceni Egyetemi Kiadó
Debrecen University Press
2015

Szaktárnet-könyvek 1.

Sorozatszerkesztő:
Maticsák Sándor

Készült
a SZAKTÁRNET (TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0009)
pályázat keretében

Lektorálta:
Hoffmann Miklós

Technikai szerkesztő:
Buzgó Anita

Borítóterv:
Nagy Tünde

ISBN 978 963 473 843 5

Kiadta a Debreceni Egyetemi Kiadó, az 1795-ben alapított
Magyar Könyvkiadók és Könyvterjesztők Egyesülésének tagja.
www.dupress.hu
Felelős kiadó: Karácsony Gyöngyi
Készült a Kapitális Nyomdában, 2015-ben.

Tartalom

Bevezetés

„A matematika olyan nyelv, amelyen nem lehet ködös vagy pontatlan gondolatokat kifejezni.” (Poincaré)

Az oktatási rendszer, ezen belül a matematika oktatása is folyamatosan változik. A Nemzeti Alaptanterv, a Kerettantervek és ehhez kapcsolódóan a tankönyvek is módosulnak. Mindez új kihívások elé állítja a gyakorló pedagógusokat és a kezdő tanárokat is. Ugyan a tananyag egésze a hosszú évek alatt kialakult szakmai konszenzusnak megfelelően viszonylag állandó, ám a hangsúlyok több esetben is eltolódnak, és így folyamatos újragondolást kívánnak a matematikatanároktól.

Könyvünk elsősorban a tanárjelölteknek készült, de reményeink szerint haszonnal forgathatják majd a kezdő tanárok mellett a gyakorló tanárok is, ha egységben szeretnék látni egy-egy témakör felépülését, vagy ha mintapéldákat keresnek egy-egy tananyagrészre vonatkozóan.

A matematika tanárszakos hallgatók szakmódszertani képzése alapvetően két kérdésre fókuszál. Az egyik kérdés a tananyag, a “Mit tanítsunk?”, a másik pedig a módszer, a “Hogyan tanítsuk?”. Munkánkat a tanítandó témakörök alapján építettük fel, a módszertani tudnivalókat az egyes fejezeteken belül a mintapéldákban és az azokat követő megjegyzésekben fogalmaztuk meg. Külön hangsúlyt helyeztünk a megoldások során előforduló tipikus tanulói hibákra, hiszen ezek jó része megfelelően átgondolt tanítással elkerülhető.

A középiskolai matematika tananyag önmagában is terjedelmes, de a tantárgy spirális felépítésének köszönhetően, csak akkor tanítható eredményesen, ha az általános iskolai ismeretekkel, követelményekkel mind a tanulók, mind a tanárok tisztában vannak. Terjedelmi okok miatt nincs mód arra, hogy ezek az ismeretek is bekerüljenek a könyvbe, ezért csupán megemlítjük, összegezzük az adott témakör által megkívánt előzetes tudáselemeket.

A tárgyalt témakörökben elsősorban a középszintű tananyag – azon belül is mindenekelőtt a klasszikus nagy fejezetek, az algebra, a függvénytan, a geometria – bemutatására törekedtünk. Az emelt szintű ismeretekre csupán néhány helyen utaltunk, ott, ahol azok szervesen kapcsolódnak a témához.

A matematika tanítás során komoly nehézséget jelent, hogy mondanivalónkat egyrészt kellő matematikai precizitással, másrészt a tanulók tudásának és életkorának megfelelő szaknyelven fogalmazzuk meg. A matematikatanár munkája során sokszor köt kompromisszumot, hallgat el a matematikából jól ismert tényeket, "csúsztat", de arra mindig vigyázni kell, hogy sose mondjunk tanítványainknak olyan definíciókat, tételeket, amelyekről alaposabb tudás birtokában kiderülhet, hogy nem helyesek.

Az iskolai, és így a középiskolai matematikatanítás nem merül ki abban, hogy bizonyos előírt tananyagokat megtanítunk a tanulóknak. Szerepe ennél sokkal többrétűbb. A matematikatanár feladata, hogy logikus gondolkodásmódra tanítson, ugyanakkor azt is megmutassa, hogyan használhatók fel a matematikai ismeretek más iskolai tantárgyban és a mindennapi életben. A könyvben szereplő példák kiválasztásánál mindezeket a szempontokat figyelembe vettük.

Pólya György, ma már klasszikusnak számító könyveiben igen sok tanácsot adott a matematikatanítás mikéntjére vonatkozóan. Ezek közül most azt a kettőt ajánljuk az olvasó figyelmébe, amelyeket könyvünk megírása során is szem előtt tartottunk:

– „*Keresd aktuális problémákban azt, ami az elkövetkező problémák megoldásában hasznos lehet – igyekezz feltárni a konkrét helyzet mögött rejlő általános megoldástípust.*"
– „*Ne tömjed az anyagot tanítványaidba, hanem ösztönözzed őket értelmes tanulásra.*" (Pólya 1971: 126)

1. FEJEZET

Halmazok

A halmazelmélet minden további matematikai fejezet alapja és kiszolgálója, így szükségszerűen a 9. évfolyam legelején célszerű megismerkedni vele. Természetesen számos erre vonatkozó ismeretet már az általános iskolában megkapnak a diákok: találkoznak a számhalmazokkal, ponthalmazokkal, a részhalmaz fogalmával, végeznek halmazokba rendezéseket és halmazműveleteket. Már a középiskolába lépés előtt fel kell, hogy ismerjék a permanencia-elv alapján egymásra épülő számhalmazokat, azok legfontosabb tulajdonságait. Venn-diagram segítségével ábrázolni is kell, hogy tudják a halmazokat, illetve viszonyukat.

Mindezt a középiskola első heteiben rendszerbe foglaljuk, átismételjük, kiegészítjük. Ennek ekkor történő tárgyalása a szaktanár számára számos előnnyel is jár: miután a halmazfogalom átszövi a matematika legkülönbözőbb területeit, így lehetőségünk van arra, hogy a jól megválasztott gyakorló feladatok kapcsán képet alkossunk az adott tanulócsoport felkészültségéről, erősségeiről, gyengeségeiről. A témakör gondolkodtatóbb feladatai segítségével felfigyelhetünk a tehetséges diákokra, próbára tehetjük őket. Ugyanakkor a témakör egyes elemeinek viszonylagos elvontsága ráébreszti az átlagos, kevéssé motivált diákot arra, hogy ha nem foglalkozik a tárggyal rendszeresen, ha nem gondolja tovább, mélyíti el otthon az iskolában szerzett ismereteket, akkor könnyen lemaradhat.

Mindenekelőtt tisztáznunk kell, hogy a *halmaz* és az *elem* fogalma alapfogalom, ezeket nem definiáljuk. Ezután kitérünk a halmazok Venn-diagrammal történő szemléltetésére, továbbá megadási módjaira:

- az elemekre jellemző tulajdonság szöveges megadása – ez a tulajdonság olyan legyen, amivel a halmaz elemeit egyértelműen megkülönböztethetjük a halmazhoz nem tartozó elemektől: $A = \{\,páros\, egyjegyű\ pozitív\, egész\, számok\}$
- elemeinek felsorolása: $A = \{2, 4, 6, 8\}$
- matematikai szimbólumok igénybe vétele: $A = \{k \mid k = 2n, 1 \le n \le 4, n \in Z\}$ – ennek elsajátítása a legnehezebb,

ezt kell a legtöbbet gyakoroltatni. Ez természetesen csak a fokozatosság elvének betartásával, lépésenként történhet.

Ezzel kapcsolatban kimondjuk a témakör első „igazi" definícióját:

Definíció

Két halmaz egyenlő, ha ugyanazok az elemeik.

Miután az *üres halmaz* fogalmát, jelölési lehetőségeit is tisztáztuk, rátérünk a tartalmazási reláció ismertetésére.

Definíció

Az *A* halmaz *részhalmaza* *H*-nak, ha *A* minden eleme benne van *H*-ban. Jele: $A \subseteq H$.

Definíció

Az *A* halmaz *valódi részhalmaza* *H*-nak, ha *A* részhalmaza *H*-nak, de *H*-nak van olyan eleme, ami nem eleme *A*-nak. Jele: $A \subset H$.

Példa

Legyen A={négyzetek}, B={téglalapok}, C={paralelogrammák}, D={trapézok}. Határozzuk meg kapcsolatukat!

Megjegyzés

A fenti példa – több hasonlóval együtt – lehetőséget ad arra, hogy a matematika egyéb területeire vonatkozó ismereteket is feleleveníthessük, pontosítsuk. Tapasztalataink szerint nem megy könnyen e négyszögek pontos meghatározása a diákok számára, még kevésbé a közöttük lévő tartalmazási viszony megadása; mindezt jól szolgálhatja egy pontos halmazábra.

A részhalmazok számára vonatkozó tétel bevezetéseként célszerű megvizsgálni a 0, 1, 2, 3 elemű halmazok részhalmazainak számát és megoszlását (*1. táblázat*). Ennek kettős célja lehet: egyrészt megsejtethetjük általa a tétel állítását, másrészt felírhatjuk és bemutathatjuk a Pascal-háromszöget, amit később, az algebra és a kombinatorika tárgyalása során is feleleveníthetünk.

Elemszám	**Részhalmazok megoszlása**	**Részhalmazok száma**
0	1	1
1	1 1	2
2	1 2 1	4
3	1 3 3 1	8
4	1 4 6 4 1	16

1. táblázat

Tétel

Legyen *n* természetes szám. Ekkor az *n* elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n.

Megjegyzés

A bizonyítást úgy célszerű elvégezni, hogy utalunk a teljes indukció módszerére és a kombinatorikai megközelítésre. Mindenekelőtt felismertetjük, hogy az üres halmaznak egyetlen részhalmaza van, önmaga, és mivel $2^0 = 1$, így $n = 0$ esetén teljesül az állítás. Ha ezek után feltesszük, hogy az n elemű halmaz részhalmazainak száma 2^n, és ehhez a halmazhoz hozzáteszünk egy újabb, $n + 1$-edik elemet, akkor az új halmaz részhalmazai a következőképpen adódhatnak: megmarad az eredeti, 2^n számú részhalmaz, továbbá keletkezik újabb 2^n számú, hiszen minden egyes eddigihez hozzátehetjük ezt az új elemet. Így az $n + 1$ elemű halmaz részhalmazainak száma: $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Ha kitértünk a Pascal-háromszög szerkezetére is, akkor az alábbi példával is folytathatjuk.

Példa

Hány valódi, illetve hány háromelemű részhalmaza van egy hatelemű halmaznak?

Megoldás

A valódi részhalmazok száma a korábbi tétel alapján könnyen megadható $\left(2^6 - 1\right)$, a háromelemű részhalmazoké a Pascal-háromszög hatodik sorából olvasható ki, de akár a kombinatorikai vonatkozásra is utalhatunk itt $\left(\binom{6}{3}=20\right)$, feltéve, hogy korábban megismertettük a binomiális együtthatókat, illetve a kombináció kiszámításának módját.

Miután a tételben már említettük a halmaz elemeinek számát, természetesen adódik a számosság fogalmának körüljárása. Tisztázzuk, hogy véges halmaz számossága az illető halmaz elemeinek száma, és kitekinthetünk a végtelen halmazok felé is. Ez utóbbit akkor érdemes megtennünk, amikor felépítjük a számhalmazokat a *permanencia-elv* segítségével.

A természetes számok **N** halmazának bevezetésekor el kell mondanunk, hogy e halmaz számosságát *megszámlálhatóan végtelen* számosságnak nevezzük; erre építhetjük a következő definíciót.

Definíció

Egy halmaz számossága *megszámlálhatóan végtelen*, ha ugyanannyi eleme van, mint a természetes számok halmazának.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy a páros természetes számok halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú!

Megjegyzés

A bizonyítás során először megteremtjük a szükséges kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést, majd képlettel is megadjuk azt; így előkészíthetjük, illetve feleleveníthetjük a függvénytan egyes alapfogalmait is.

$$\begin{array}{cccccc} N: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ P: & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{array}$$

$$f: N \to P, f(n) = 2n, n \in$$

$$g: P \to N, g(p) = \frac{p}{2}, p \in$$

Példa

Bizonyítsuk be, hogy az egész számok **Z** halmaza megszámlálhatóan végtelen számosságú!

Megjegyzés

Az előzőekhez hasonlóan járhatunk el, de a függvényt csak két részletben adhatjuk meg. Könnyen látható, hogy ez a függvény is kölcsönösen egyértelmű.

$$\begin{array}{llccccccc} N: & \ldots & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ Z: & \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$f: Z \to N,\ f(k) = \begin{cases} 2k, & k \geq 0,\ k \in Z \\ -2k-1, & k < 0,\ k \in Z \end{cases}$$

$$g: N \to Z \quad g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \textit{ha n páros természetes szám} \\ \frac{-n-1}{2}, & \textit{ha n páratlan természetes szám} \end{cases}$$

A racionális számok halmazának megszámlálhatóan végtelen számosságú voltát a Cantor-féle szép átlós bejárással mutathatjuk be; ennek felkutatását akár szorgalmi házi feladatként is kitűzhetjük, hiszen az érdeklődő és motivált diákok minden bizonnyal szívesen utánanéznek az interneten, és beszámolnak róla az órán.

Az irracionális számok halmazának bevezetése során meg kell említenünk, hogy ez a halmaz már nem megszámlálhatóan végtelen, hanem egy nagyságrenddel nagyobb, *kontinuum*-számosságú – így aztán a valós számok **R** halmazára is ez utóbbi teljesül.

Az **R** számhalmaz kialakítása után sort kell kerítenünk az intervallumok pontos definiálására, hiszen ezekkel mind az algebra, mind az analízis későbbi tárgyalásakor folyamatosan dolgozni fogunk. A teljesség igénye nélkül lássunk néhány példát ezek megadására.

Definíció

Zárt intervallum: $[a;b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$

Nyílt intervallum: $]-\infty;b[= \{x \in R \mid x < b\}$

Félig zárt, félig nyílt intervallum: $[a;\infty[= \{x \in R \mid x \geq a\}$

Amikor tisztázzuk, hogy a középiskolában tárgyalandó legbővebb számhalmaz az $R = Q \cup Q^*$, akkor tudhatjuk, hogy az unió (egyesítés) műveletének fogalmát és jelölését hozzák a diákok az általános iskolából, de ez jó alkalmat is adhat a halmazalgebra műveleteinek felidézésére.

A műveletek bevezetésekor hangsúlyoznunk kell, hogy ezek egy adott alaphalmaz részhalmazai közt érvényesek. A későbbi analógiák érdekében is érdemes láttatnunk, hogy egy egyváltozós („tagadás-jellegű”), és két kétváltozós („szorzás-”, illetve „összeadás-jellegű”) műveletet vezetünk be, a megfelelő tulajdonságokkal.

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A \subseteq H$. Ekkor az A (H-ra vonatkozó) *kiegészítő halmaza (komplementere)* azon H-beli elemek halmaza, amelyek nincsenek benne A-ban. Jele: $\overline{A}$.

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A, B \subseteq H$. Ekkor az A és B halmazok *metszete* azon H-beli elemek halmaza, amelyek A-ban és B-ben is benne vannak. Jele: $A \cap B$.

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A, B \subseteq H$. Ekkor az A és B halmazok *uniója(egyesítése)* azon H-beli elemek halmaza, amelyek A-ban vagy B-ben vannak. Jele: $A \cup B$.

A definiálás mellett ki kell térnünk e műveletek legfontosabb tulajdonságaira, elsősorban a kommutativitásra, az asszociativitásra és a disztributív törvényekre $(A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, illetve $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C))$, továbbá a két de Morgan-azonosságra ($\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, illetve $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$). Mindezeket „bizonyítani” is érdemes, legalább a középiskolában elfogadott, Venn-diagrammal történő szemléltetéssel.

Definíció

Legyen adott a H alaphalmaz, továbbá legyen $A, B \subseteq H$. Ekkor az A és B halmazok $A \setminus B$ *különbségén* azon H-beli elemek halmazát értjük, amelyek A-nak elemei, de B-nek nem.

Érdemes rámutatnunk, hogy a fenti művelet eredménye a már definiált műveletekkel is előállítható ($A \setminus B = A \cap \overline{B}$).

A különbség definiálása után megemlíthetjük a szimmetrikus differencia $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$) fogalmát, már csak azért is, mivel ez a logika „kizáró vagy” műveletével mutat szoros rokonságot.

A műveleteket, azok tulajdonságait számos különböző feladattípuson gyakorolhatjuk. Ezek egy része „klasszikus” halmazos feladat.

Példa

Határozzuk meg az A, B, C halmazokat, ha tudjuk, hogy

(1) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

(2) $A\cap(B\cup C)=\{1,3,5,6\}$,

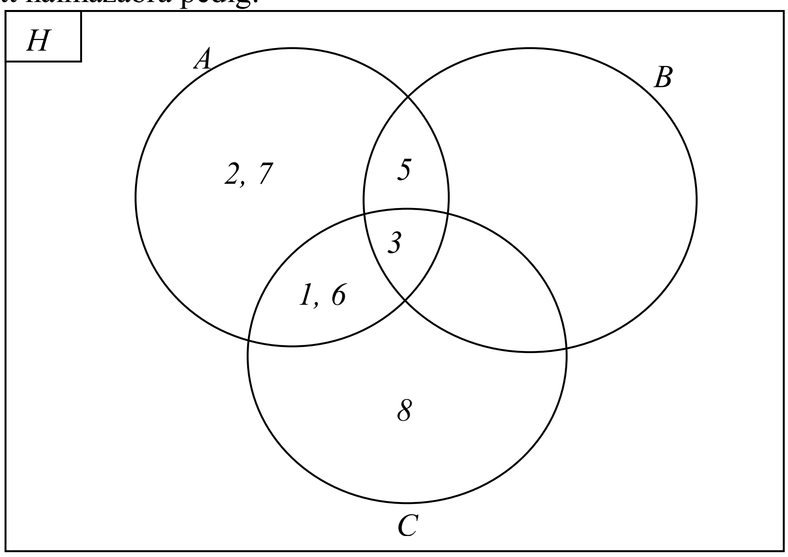
(3) $C\setminus(A\cup B)=(8)$,

(4) $A\setminus B=\{1,2,6,7\}$,

(5) $B\cap C=\{3\}$!

Megoldás

A halmazábra kitöltését „belülről” érdemes kezdeni (*1. ábra*). Itt azonban a (3) feltételben szereplő *8*-as számot tudjuk először elhelyezni. A (2) és az (5) együttesen kijelöli a *3*-as szám helyét, majd a (2) és a (4) összevetése kijelöli az *1, 6, 5* elhelyezkedését. Ugyanebből következik a *2* és a *7* helye is. Az egyes halmazok: $A=\{1,2,3,5,6,7\}$, $B=\{3,5\}$, $C=\{1,3,6,8\}$, a kitöltött halmazábra pedig:



1. ábra

Az intervallumokkal végzett műveletek gyakorlása is rendkívül fontos, hiszen később, például az egyenlőtlenségek megoldása vagy a függvények értelmezési tartományának meghatározása során nagy hasznát vehetjük.

Példa

Legyen az alaphalmaz az **R**, legyen továbbá $A = [-1;3], B = [1;5[$! Adjuk meg intervallum-jelöléssel, és ábrázoljuk a számegyenesen a következő műveletek eredményét:

a) $\overline{A}$ b) $A \cap B$ c) $B \setminus A$ d) $\overline{A} \cap \overline{B}$

A továbbiakban két, illetve háromelemű halmazokra bemutatjuk, illetve felismertetjük az egyesítés elemszámára vonatkozó szitaformulát:

Tétel

Legyen adott a H véges elemszámú alaphalmaz, továbbá legyen $A, B, C \subseteq H$.

Ekkor $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, illetve

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

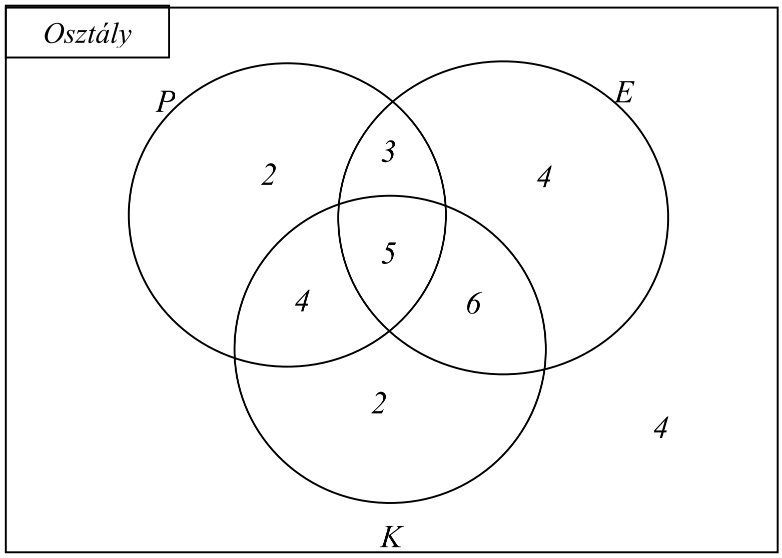
E formulák segítségével valóság-közeli feladatokat is gyakorolhatunk.

Példa

Egy *30* fős osztályban felmérést végeztek a diákok olvasási szokásaival kapcsolatban. Ebből kiderült, hogy *14*-en olvasták A Pál utcai fiúk című Molnár Ferenc-regényt, *18*-an az Egri csillagokat, Gárdonyi Géza művét, *17*-en pedig a Jókai Mór által írt A kőszívű ember fiait. A Molnár- és a Gárdonyi-regényt *8*-an, a Molnár- és a Jókai-művet *9*-en, míg a Jókai- és a Gárdonyi-regényt *11*-en olvasták. Mindhárom regényt mindössze *5* tanuló olvasta. Hányan nem ismerkedtek meg egyik művel sem?

Megjegyzés

Az ilyen típusú feladatok megoldását kétféle módszerrel is megmutathatjuk, hiszen a szitaformula alkalmazása mellett a halmazábra (*2. ábra*) megfelelő kitöltése is helyes eredményre vezethet.



2. ábra

Oszthatósági jellegű feladatokat kitűzve a tanulók ilyen irányú előismereteit is próbára tehetjük.

Példa

Legyen az alaphalmaz $H = \{k \in N^+ \mid k \le 30\}$, legyen adott továbbá két részhalmaza: $A = \{k \in H \mid k = 5n, n \in Z\}$ és $B = \{k \in H \mid k = 2n + 1, n \in Z\}$!

a) Adjuk meg szövegesen a két halmazt!

b) Adjuk meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával: $A \cap B$, $A \setminus B$!

Megjegyzés

Törekednünk kell arra, hogy a diákok pontosan fogalmazzák meg a szöveges választ. Például: „*A* az *5*-tel osztható, *30*-nál nem nagyobb pozitív egészek halmaza”, illetve „*B* a *30*-nál nem nagyobb páratlan pozitív egészek halmaza”. $A \cap B = \{5, 15, 25\}$, $A \setminus B = \{10, 20, 30\}$

A ponthalmazok köréből is célszerű példákat vennünk, ehhez azonban néhány geometriai fogalmat tisztáznunk kell (kör, távolság).

Példa

Legyen az alaphalmazunk az S sík pontjainak halmaza, legyen továbbá adott az S síkon két pont, K és L, amelyekre $d(K;L)=5cm$! Legyen $A=\{P\in S \mid d(P,K)\le 4\,cm\}$, továbbá $B=\{P\in S \mid d(P,L)<3\,cm\}$! Ábrázoljuk a következő ponthalmazokat: $A\cap B$, $B\setminus A$!

A későbbi függvénytani, illetve koordináta-geometriai fejezetek előkészítéseként itt érdemes definiálni az $R\times R$ direkt szorzatot, illetve feleleveníteni a koordináta-rendszer elnevezéseit, jellemzőit.

Definíció

Az $R\times R=\{(x,y) \mid x,y\in R\}$ halmazt, azaz azon rendezett elempárok halmazát, amelyek mindkét eleme valós szám, a valós számhalmaz önmagával képezett <u>*direkt (Descartes-féle) szorzatának*</u> nevezzük.

Példa

Legyen $A,B\subset R\times R$, $A=\{P(x;y)\in R\times R \mid |x|\le 2\}$,
$B=\{P(x;y)\in R\times R \mid |y|\le 3\}$! Ábrázoljuk a következő halmazokat:
$A\cap B, A\setminus B$!

Látható, hogy nagyon sokrétű, funkciójában is összetett a középiskolába lépő diákok által elsőként megismert halmazelméleti fejezet. Mindazonáltal érdemes kihasználni ezt a sokszínűséget, hiszen számos didaktikai, motivációs célunkat itt alapozhatjuk meg, a diákok összetételét, előképzettségét itt mérhetjük fel igazán.

Ugyanakkor a későbbiekben a matematika szinte minden területén előkerülnek a halmazműveletek, tehát folyamatosan frissítenünk kell az itt megszerzett tudásunkat. Lássunk néhány példát erre is az analízis, az algebra és a koordináta-geometria területéről.

Példa

Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{\lg(9-x^2)}{(x^2-4x+4)\sqrt{x-1}}$, $x\in R$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás

A logaritmus értelmezhetősége miatt a számlálóban lévő kifejezésre $9-x^2>0$, vagyis $x\in\left]-3;3\right[$ teljesül. A nevezőben található négyzetgyökös kifejezés értelmezési tartománya a $\left]1;\,\infty\,\right[$ intervallum, figyelembe véve, hogy nullával sem lehet egyenlő a nevező.

A nevező első szorzótényezője láthatóan $(x-2)^2$, így ebből az $x\neq 2$ feltétel következik. Az első két halmaz $\left]1;\,3\right[$ metszetéből kivonva a $\{2\}$ halmazt, adódik a keresett értelmezési tartomány: $D_f=\left]1;\,3\right[\setminus\{2\}$.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\dfrac{x^2-x-6}{12+x-x^2}\geq 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

Először rögzítenünk kell, hogy egy tört értéke pontosan akkor nem negatív, ha a számláló egyenlő *0*-val, a nevező viszont nem, továbbá, ha a számláló és a nevező előjele megegyezik. A nevezőben látható másodfokú függvény képe fordított állású parabola, aminek zérushelyei *-3* és *4*, a számlálóban találhatóé pedig normálállású, *-2* és *3* zérushelyekkel. Összevetve a két függvény képét – közös koordináta-rendszerben ábrázolva – adódik a megoldás: $M=\left]-3;\,-2\,\right]\cup\left[3;\,4\,\right[$.

Példa

Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben a következő egyenlőségnek eleget tévő $P(x;y)$ pontok halmazát:
$\left(y^2-4x^2\right)\left(y^4-x^2\right)\left(x^2+y^2-4\right)=0$!

Megjegyzés

Tisztáznunk kell, hogy egy szorzat értéke pontosan akkor egyenlő *0*-val, ha valamelyik tényezője *0*. Az első tényező szorzattá alakításával rátalálunk az origón átmenő, *2*, illetve *-2* meredekségű egyenesekre. A második tényező szintén szorzattá alakítással adja az $x=y^2$ egyenletű jobbról nyitott, továbbá az $x=-y^2$ balról nyitott parabolákat, míg a harmadik tényezőben felismerhetjük az origó középpontú, *2* egység sugarú kör egyenletét. A megoldáshalmaz e ponthalmazok egyesítéseként adódik.

2. FEJEZET

Logika

A középiskolai tanárok visszatérő dilemmája: hogyan, milyen formában, mikor foglalkozzunk a logikai alapismeretekkel, mikor öntsük formába mindazt az ismeretanyagot, ami nélkül egyelen tételt sem tudnánk kimondani, bizonyítani, illetve ami nélkül feladatokat sem tudnánk megoldani. Hiszen minden ilyen esetben logikai műveleteket végzünk, állítások igazságtartalmáról döntünk, még ha a formális logika elemeinek becsempészése nélkül is. A tantervek, és így a tankönyvek többsége is a szőnyeg alá sepri ezt a gondot, és nem, vagy csupán a 12. évfolyamos ismétlés során foglalkozik a logikával, pedig már a 9. évfolyamon, a halmazelméleti alapozás után szükséges legalább néhány órát e tárgykörnek szentelni.

Ezt már csak azért is célszerű ekkor megtennünk, mert a gondosan bevezetett halmazalgebrai ismeretanyag óriási segítségünkre lehet a Boole-algebra felépítésében, elsajátításában.

A logika alapfogalmainak tisztázása során ki kell térnünk az *ítélet (kijelentés, állítás)*, illetve az *igaz, hamis logikai érték* fogalmára. Ezek után egyszerű kombinatorikai alapfeladatként felismertethetjük, hogy az ítéleteken végzett egyváltozós logikai műveletet összesen 4, míg kétváltozósat összesen 16-félét értelmezhetünk. Ezek közül azonban elsősorban azokat érdemes kiemelni, amelyek analógiát mutatnak a halmazalgebrában látott műveletekkel, azaz a Boole-algebra műveleteit. Definiálásuk igazságtáblázat segítségével vagy szövegesen történhet.

Az egyváltozós komplementer-képzés műveletének itt a *negáció* (NEM-művelet) felel meg.

Definíció

A *negáció* az a logikai művelet, ami az állítás logikai értékét az ellenkezőjére váltja. A művelet jele: $\neg p$, ahol p jelöli az eredeti állítást.

Megjegyzés

A $\neg p$ logikai értéke tehát pontosan akkor igaz, ha p hamis.

A metszetképzés megfelelője a konjunkció (ÉS-művelet), míg az egyesítésé a diszjunkció (megengedő VAGY-művelet).

Definíció

A <u>*konjunkció*</u> az a két állítás között értelmezett logikai művelet, amelynek eredménye pontosan akkor igaz, ha mindkét állítás igaz. Jele: $p \wedge q$, ahol p és q jelöli a két állítást.

Definíció

A <u>*diszjunkció*</u> az a két állítás között értelmezett logikai művelet, amelynek eredménye pontosan akkor hamis, ha mindkét állítás hamis. Jele: $p \vee q$, ahol p és q jelöli a két állítást.

Igazságtáblázattal megadva (*1. táblázat)*:

p	[redacted]
i	*h*
h	*i*

p	*q*	[redacted]
i	*i*	*i*
i	*h*	*h*
h	*i*	*h*
h	*h*	*h*

p	*q*	[redacted]
i	*i*	*i*
i	*h*	*i*
h	*i*	*i*
h	*h*	*h*

1. táblázat

Az igazságtáblázatok segítségével könnyen megmutathatjuk, hogy ezen műveletek pontosan ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a halmazalgebra megfelelő műveletei.

Példa

Bizonyítsuk be igazságtáblázat segítségével a két disztributív törvényt:

(1) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$;

(2) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$!

Megoldás

Az igazságtáblázatban felépítjük, majd összehasonlítjuk a bal- és a jobb oldalon lévő kifejezéseket. Így például az *(1)* pontra a következő táblázat adódik (*2. táblázat)*.

p	*q*	*r*	[redacted]	*baloldal*	[redacted]	[redacted]	*jobb o.*
i	*i*	*i*	*i*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*i*	*h*	*i*	***i***	*i*	*h*	***i***
i	*h*	*i*	*i*	***i***	*h*	*i*	***i***
h	*i*	*i*	*i*	***h***	*h*	*h*	***h***
i	*h*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	***h***
h	*i*	*h*	*i*	***h***	*h*	*h*	***h***
h	*h*	*i*	*i*	***h***	*h*	*h*	***h***
h	*h*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	***h***

2. táblázat

Külön érdemes itt is kitérni a két de Morgan-azonosságra, amikkel kapcsolatban összevethetjük a köznyelvi kötőszavak és a matematikai logikában használt kifejezések jelentéstartalmát.

Példa

Tagadjuk kétféleképpen a következő kijelentést: Ma szerda van és süt a nap.

Megjegyzés

Még ilyen egyszerű példa esetén sem találja meg a legtöbb tanuló a kétféle tagadást és a de Morgan-azonosság alkalmazhatóságát.

($\neg(p \wedge q)$: *„Nem igaz, hogy ma szerda van és süt a nap”;*

$(\neg p) \vee (\neg q)$: *”Ma vagy nem szerda van, vagy nem süt a nap”.)*

A műveleteknél sokszor akkor is érdemes kitenni a zárójelet, ha az elsőbbségi sorrend ezt nem indokolná – itt is, mint a halmazelméletben, a megértést könnyíti a zárójelhasználat. Érdemes ugyanakkor felhívni a diákok figyelmét a redundáns zárójelek nélküli alakra is!

Érdemes megemlíteni a „kizáró VAGY” (*antivalencia*) műveletét, nemcsak a szimmetrikus differenciával való analógiája miatt, hanem azért is, hogy ezzel újabb kapcsolódási pontot mutassunk a nyelvi szerkezetek, továbbá az informatika tudománya felé.

A logika – csakúgy, mint a halmazelmélet – elemei át- meg átszövik a középiskola négy évfolyamának matematika tananyagát. A 9. évfolyamon, amikor ezt az áttekintést végezzük, még nincs a diákoknak elég ismeretanyaguk ahhoz, hogy mélyebben eligazodjanak a logikai kvantorok, a „minden, bármely” ($\forall$) és a „létezik, van olyan” ($\exists$) világában. Ezek jelentéstartalmát, illetve a segítségükkel megfogalmazott állítások vizsgálatát, tagadását a későbbiekben, folyamatosan érdemes tisztázni, többek között az alábbi példák segítségével.

Példa

Tagadjuk kétféleképpen a következő állítást: „*Minden trapéz paralelogramma”!* Igaz-e ez a tagadás?

Megjegyzés

A formális, „*Nem igaz az, hogy minden trapéz paralelogramma*” tagadás az előzetes ismeretek birtokában könnyen megszületik. A másik lehetőség azonban sokkal kevésbé egyértelmű a diákok számára. Sokan úgy gondolják, hogy a „minden” tagadása az „egyik sem” – pedig ez utóbbinak logikai értelemben nincs köze az eredeti állításhoz. A tagadás helyesen „*Van olyan trapéz, ami nem paralelogramma.*” Ez utóbbi állítás természetesen hamis, hiszen könnyen mutatható olyan trapéz, aminek a szárai nem párhuzamosak. Az ilyen típusú feladatok arra is jók, hogy az egyéb matematikai területek fogalmait is folyamatosan a felszínen tartsuk.

Hasznos lehet a bevésés folyamata szempontjából az a feladattípus is, ahol több, hasonlóan hangzó állítás közti kapcsolatrendszert kell felderíteni.

Példa

Az alábbi négy állítás közül háromnak a tagadása is megtalálható az állítások közt. Melyik ez a három, és melyiknek mi a tagadása?

(1) *Minden diák tudja a Nemzeti dalt.*

(2) *Egyetlen diák sem tudja a Nemzeti dalt.*

(3) *Nem minden diák tudja a Nemzeti dalt.*

(4) *Van olyan diák, aki nem tudja a Nemzeti dalt.*

Megjegyzés

Az előzőek alapján is nyilvánvaló lehet, hogy az (1) állítás tagadása a (3) és a (4), míg a (2) kilóg a sorból, logikai értelemben nincs köze a másik háromhoz.

Ugyanígy hosszas, aprólékos munkával érhető el, hogy egy állításban felismerjék a „ha … akkor” (*implikáció*), illetve az „akkor és csakis akkor” (*ekvivalencia*) szerkezetet. Így ezek összefoglaló tárgyalására csak sok ilyen irányú példa feldolgozása után, például a 12. évfolyamon esedékes ismétlés során érdemes kitérni.

A korábbi példánkban szereplő *„Minden trapéz paralelogramma”* állítással például hosszasan kell próbálkoznunk, amíg megszületik belőle a

„Ha egy négyszög trapéz, akkor az a négyszög paralelogramma” szerkezet. Miután az igazságtartalmát már korábban megbeszéltük, így most a puszta szerkezetre elegendő koncentrálnunk, bemutatva a *feltétel (előtag, premissza)* és a *következmény (utótag, konklúzió)* kapcsolatát. Akár ugyanezen a példán megmutathatjuk az állítás megfordításának módját is – amit egyébként rendszerint a tagadással kevernek össze a felületesebb diákok. Ha megértetjük, hogy a megfordítás (*„Ha egy négyszög paralelogramma, akkor az trapéz.”)* a feltétel és a következmény megcserélésével keletkezik, és igazságtartalmuk egymástól függetlenül vizsgálható, akkor természetesen adódik ezen újabb állítás igazságtartalmának kérdése – és nem biztos, hogy azonnal rávágják a diákok a helyes *„igaz”* választ.

Az ilyen típusú gyakorlatok pozitív hozadékát akár már a 9. évfolyamon tapasztalhatjuk, amikor a Pitagorasz- vagy akár a Thalesz-tétel szerkezetét, megfordítását, oda-vissza igazságtartalmát vizsgáljuk. Nem árt ezeknél is hosszabban elidőzni, nagyon hasznos a tételeket külön-külön is, együtt pedig („oda-vissza”) többféleképpen is megfogalmazni, hogy ráérezzenek a diákok az ekvivalencia szerkezetére *(„akkor és csakis akkor, ha”; „annak szükséges és elegendő feltétele, hogy”).*

A szükséges és elegendő feltétel kérdésköre később, többször is előkerül: erre az egyik „klasszikus” példa a kör és a kétismeretlenes másodfokú egyenlet kapcsolata. Célszerű a szükséges feltételek levezetése után kérni a tanulóktól, hogy fogalmazzanak meg egy (igaz) „ha…akkor” szerkezetet az ismereteik alapján. Nem könnyen találják meg a helyes *„Ha az* $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ *egyenlet kör egyenlete, akkor* $A = B \neq 0$ *és* $C = 0$*.”*választ!

Láthatjuk tehát, hogy a logika elemei, szerkezetei, műveletei sűrűn átszövik a négy évfolyamon végzett oktatómunkánkat; megérdemli hát e tárgykör, hogy tudatosan, átgondoltan foglalkozzunk vele, mindig olyan példák segítségével, amik a legjobban illeszkednek az adott korcsoport fejlettségi szintjéhez és előismereteihez.

Végül említsük meg egy további pozitív hozadékát is annak, ha a halmazalgebrát és a Boole-algebrát egységes rendszerbe foglalva, alaposan megtanítjuk a 9. évfolyamon: később, a 11. évben könnyebb dolgunk lesz az eseményalgebra megértetése során, hiszen – jó esetben – csupán vissza kell utalnunk a korábban jól bevésett ismeretanyagra.

3. FEJEZET

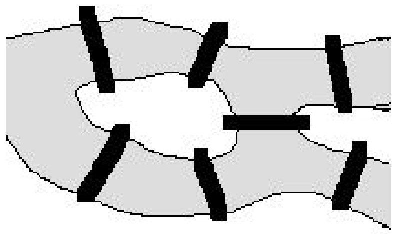
Gráfelméleti problémák

Különböző problémák megoldására, ábrázolására már az általános iskolások is használnak gráfokat, nem csak matematika órákon. Később középiskolában is alkalmazzuk ezeket (pl. a kombinatorikában) anélkül, hogy az elnevezéseket megemlítenénk. A gráfokkal kapcsolatos legfontosabb fogalmakat, tételeket korábban a 11. évfolyamon tanítottuk, bár a téma nehézsége (könnyűsége) nem indokolja a magasabb évfolyamokon való tanítást. A kerettanterv szerint a gráfelméleti alapismeretek 9-10. évfolyamra kerültek át. A középszintű érettségi vizsga követelményei mindössze arra irányulnak, hogy a vizsgázó tudjon konkrét szituációkat szemléltetni és egyszerű feladatokat megoldani gráfok segítségével. Emelt szinten a gráfok matematikai modellként való alkalmazása mellett ismerni kell a fontosabb definíciókat, tételeket.

A téma bevezetését ajánlott néhány gráfelméleti érdekességgel kezdeni. Érdemes ismertetni a „königsbergi hidak” és a „három ház, három kút” problémát, mert mindkettő könnyen érthető, ezért a gyerekek szívesen foglalkoznak a problémával, és a helyes megoldást is mindenki megsejti. Az első probléma ráadásul azért is érdekes, mert az Euler nevéhez fűződő megoldásához szokás kötni a gráfelmélet, mint önálló matematikai kutatási terület megjelenését.

Példa

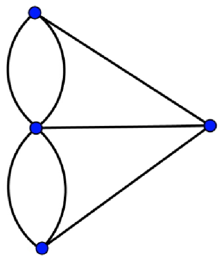
(Königsbergi hidak.) Königsberg (ma Kalinyingrád) városa régen Poroszországhoz tartozott. A városka a Pregel folyó két partján és két szigetén terül el, melyeket 7 híd kötött össze az *1. ábra* szerint. A városka lakóinak kedvelt időtöltése volt sétálgatni a hidakon, így vetődött fel az a kérdés, hogy lehet-e olyan sétát tenni, hogy a hidak mindegyikén pontosan egyszer haladjanak át.



1. ábra

Megjegyzés

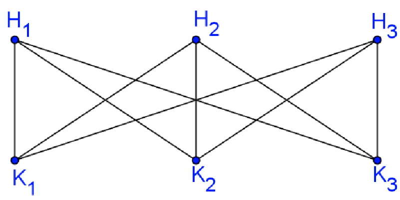
A probléma könnyebben átlátható, ha a hidakat egy-egy vonallal, a szárazföldet egy-egy ponttal ábrázoljuk (*2. ábra*). Az így kapott alakzat egy gráf. A feladat a jól ismert „megrajzolható-e a ceruza felemelése nélkül” típusú, könnyen érthető kérdéssé fogalmazható át.



2. ábra

Példa

(Három ház, három kút.) A *3. ábra* szerinti három házból tervezzünk a három kúthoz 9 utat úgy, hogy mindegyik házból mindegyik kúthoz vezessen út, és az utak ne keresztezzék egymást.



3. ábra

A bevezető feladatokat követően tisztázzuk a gráfelmélet alapvető fogalmait. Középiskolában csak olyan gráfokkal foglalkozunk, melyeket véges számú pont alkot.

Definíció
Gráfnak nevezzük pontok és vonalak olyan halmazát, amelyben a vonalak pontokat kötnek össze úgy, hogy minden vonalra legalább egy, legfeljebb két pont illeszkedik.
Elnevezések: A gráf pontjait *csúcsoknak* is nevezik, a pontokat összekötő vonalak a gráf *élei*.
A gráf egy pontjába összefutó élek száma az adott pont *fokszáma*.

Definíció
Ha két pontot egynél több él köt össze, ezeket *párhuzamos (többszörös) éleknek* nevezzük.

Definíció
Hurokél az olyan él, amelynek két végpontja ugyanaz a pont.

Megjegyzés
Egy hurokél a pont fokszámát kettővel növeli.

Definíció
Egyszerű gráf az olyan gráf, amelyben nincsenek párhuzamos élek és hurokélek.

Definíció
Teljes gráf az olyan gráf, amelynek minden pontjából pontosan egy-egy él vezet az összes többi pontba.

Tétel
Bármely gráfban a pontok fokszámának az összege egyenlő az élek számának a kétszeresével.

Tétel
Az n-pontú teljes gráf éleinek száma: $\frac{n(n-1)}{2}$.

Megjegyzés
A második tétel bizonyítása pontosan ugyanazzal a gondolatmenettel történhet, amivel a sokszögek átlóinak számára vonatkozó tételt is igazoljuk. A másik lehetőség a kombinációval (annyi él, ahányféle pontpárt

választhatunk) való bizonyítás. A két tétel bizonyítását még a gyengébb csoportokban is érdemes átvenni.

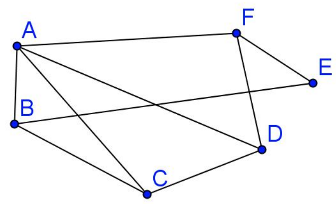
A fogalmak, elnevezések begyakorlásához minél több példát kell látniuk a tanulóknak. A gráfokat az ábrák mellett megadhatjuk éleinek felsorolásával vagy szomszédsági mátrixszal is (az elnevezést nem is kell használnunk). A fenti fogalmak és tételek ismeretében megoldhatók olyan egyszerűbb feladatok, melyekben a gráfokat vagy konkrét relációk szemléltetésére használjuk, vagy az élek számára, a pontok fokszámára vonatkozó tételeket használjuk.

Példa

Egy vacsorára 4 vendéget hívott a házigazda. Vendégei közül ketten 3-3, ketten pedig 2-2 embert ismertek már korábban is a társaságból. Szemléltessük az ismeretségeket gráffal! (Feltesszük, hogy az ismeretségek kölcsönösek, és a házigazda mindenkit ismer.)

Példa

Egy iskolai focibajnokságon 6 csapat vesz részt, a lejátszott mérkőzéseket szemlélteti a *4. ábra*. Hány mérkőzés van még hátra, ha minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik?



4. ábra

Megjegyzés

A fenti példa kapcsán ismertethető a komplementer gráf fogalma.

Példa

Létezik-e olyan egyszerű gráf, melyben a pontok fokszámai:

a) 1, 1, 2, 2, 4; b) 1, 2, 3, 3, 4; c)1, 3, 3, 4, 5?

Ha igen, rajzoljunk ilyen gráfot!

Megoldás

A b) feladatnak megfelelő gráf nem létezik (a fokszámok összege páratlan). A c) feladatnak sincs megoldása, mert ötpontú egyszerű gráfban a fokszám legfeljebb 4 lehet (nem egyszerű gráf létezik ilyen fokszámokkal).

Példa

Egy iskola asztalitenisz bajnokságán 6 tanuló vesz részt, mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi 1 mérkőzést játszott, Barna és Csaba 2-2 mérkőzést, Dani 3-at, Enikő és Feri 4-4-et. Rajzoljuk le az eddig lejátszott mérkőzések egy lehetséges gráfját! Lehetséges-e, hogy Andi az eddig lejátszott egyetlen mérkőzését Barnával játszotta?

Megjegyzés

Általában az ezekhez hasonló feladatokban a megfelelő gráf megkonstruálása a könnyebb feladat, és a lehetetlen esetek bizonyítása a nehezebb. Ne felejtsük el hangsúlyozni, hogy az még nem megoldás, ha nem sikerül találnunk a feltételeknek megfelelő gráfot, a sejtést igazolni is kell.

Példa

Egy értekezleten résztvevő személyek közül azok, akik nem ismerik egymást, névjegykártyát cserélnek. Igazoljuk, hogy azoknak az embereknek a száma, akik páratlan számú névjegykártyát kaptak, páros!

Megoldás

A példában azt kell felhasználni, hogy a gráfban a fokszámok összege páros szám, ezért a páratlan fokszámú pontok száma páros.

Példa

Egy 15-ös létszámú versenyen mindenki mindenkivel egyszer mérkőzik. Eddig 98 mérkőzést játszottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan résztvevő, aki már befejezte a versenyt.

Megoldás

Indirekt tegyük fel, hogy még senki nem játszott 14 mérkőzést. Nem játszhatott mindenki 13-at sem ($15 \cdot 13$ páratlan, l. előző példa), tehát a legtöbb lejátszott mérkőzést úgy kaphatjuk, ha egy versenyző 12, a többi 13 meccset játszott. Ez $\frac{14 \cdot 13 + 12}{2} = 97$ mérkőzés lenne, de ennél többet játszottak, ezért igaz az állítás.

A következő példák nehezebbek, átlagos csoportokban a megoldásuk rövid egyéni próbálgatást követően közös megbeszéléssel történhet.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy bármely hattagú társaságban mindig van három olyan ember, akik kölcsönösen ismerik egymást, vagy három olyan ember, akik kölcsönösen nem ismerik egymást!

Megoldás

Fogalmazzuk át a feladatot egy hatpontú egyszerű gráfra! A pontok egy-egy embert szemléltetnek, az élek a közöttük levő kapcsolatokat. Két pontot kössünk össze piros éllel, ha a megfelelő két ember ismeri egymást, és kékkel, ha nem. Be kell látnunk, hogy bármely ilyen gráfban van piros vagy kék „háromszög”. Minden pontból 5 él indul. Tekintsünk egy tetszőleges A pontot. Két eset van: A-ból legalább három piros él indul ki, vagy legalább három kék él. Nézzük az első esetet, legyen az A-ból induló három piros él: AB, AC, AD. Ha B, C, D pontok közül bármely kettő piros éllel van összekötve, akkor A ponttal együtt keletkezett piros „háromszög”. Ha közöttük nincs piros él, akkor bármely kettő kék éllel van összekötve, tehát kék „háromszög” keletkezett. Hasonló gondolatmenettel igazolhatjuk a másik esetre is az állítást.

Megjegyzés

Ha szóba került a komplementer gráf fogalma, akkor arra is kitérhetünk, hogy a feladat állítása egyenértékű a következővel: bármely hatpontú gráf, vagy komplementere tartalmaz „háromszöget”.

Példa

Öt sziget közül bármelyik kettőt hajó- vagy repülőjárat köt össze úgy, hogy egyik járattal sem lehet három szigetet körbejárni. Mutassuk meg, hogy minden szigetről két hajó- és két repülőjárat indul!

Megjegyzés

Az előző példa alapján önállóan megoldható, pl. házi feladatként feladható.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy bármely társaságban mindig van két olyan ember, akiknek a társaság tagjai között ugyanannyi ismerőse van!

Megoldás

A feladat másként az, hogy igazoljuk: bármely egyszerű gráfnak van két azonos fokú pontja. n-pontú egyszerű gráf bármely pontjának a fokszáma $0, 1, 2, \dots n-1$ lehet. A 0 és az $n-1$ kizárják egymást, hiszen ha egy pont fokszáma $n-1$, akkor az összes többivel össze van kötve, tehát nem lehet 0 fokú pont. Tehát a fokszámokra csak $n-1$ lehetőség van az n-pontú gráfban. A skatulyaelv szerint van két azonos fokszámú pont. (A skatulyaelv szerint ha k skatulyába $k+1$ tárgyat helyezünk el, akkor biztosan van olyan skatulya, amelybe legalább két tárgy kerül.)

Az élekkel kapcsolatban néhány új fogalmat ismertetünk meg: a séta, a vonal, az út és a kör fogalmát. Az összefüggő gráf és a fa fogalmához az út és a kör definíciójára mindenképp szükség van.

Definíció

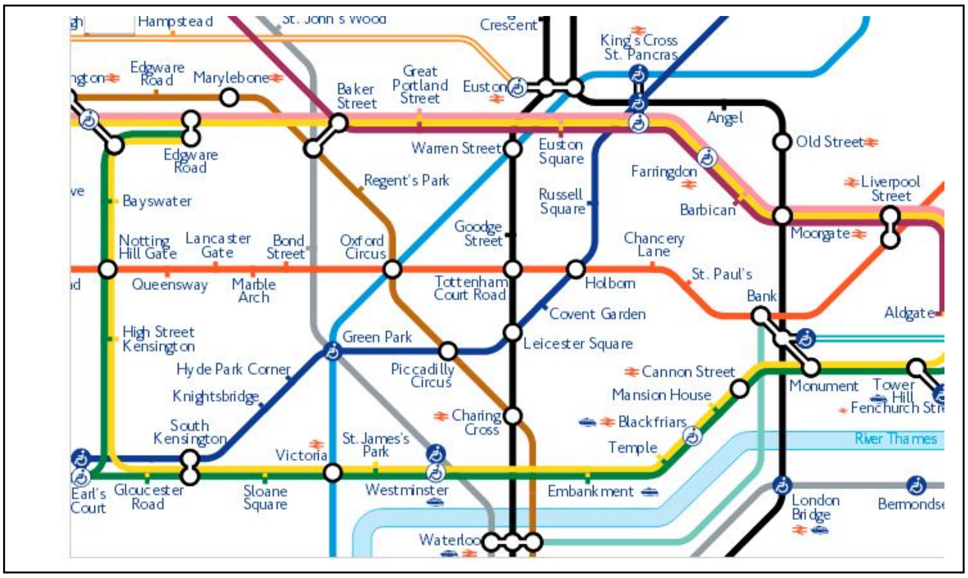
Útnak nevezzük a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorozatát, amely egyetlen ponton sem megy át egynél többször.

Definíció

Körnek nevezzük a gráf egymáshoz csatlakozó éleinek olyan sorozatát, amelynek kezdő- és végpontja ugyanaz, és egyetlen más ponton sem megy át egynél többször.

Példa

Az *5. ábra* a londoni metróhálózat egy részletét mutatja. Keressünk a gráfban kört! Adjunk meg 3 különböző utat a King's Cross és a Westminster között!

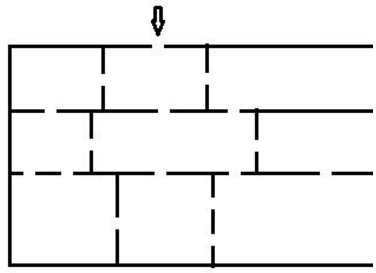


5. ábra

Kiegészítő anyagként érdeklődőbb osztályokban nézhetünk egy-két feladatot – a königsbergi hidak problémájára visszautalva – a zárt és nyílt Euler-vonalra és a Hamilton-körökre.

Példa

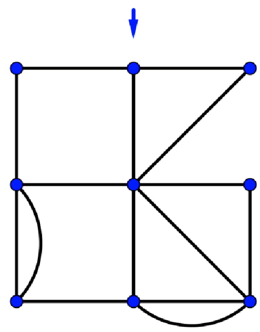
A *6. ábra* egy királyi palota alaprajzát mutatja. Az uralkodó minden reggel bemegy a palotába a nyíllal megjelölt bejáraton, majd végigsétál a termeken úgy, hogy minden ajtón pontosan egyszer megy át. Végül a trónteremben leülve fogadja a látogatóit. Melyik a trónterem?



6. ábra

Megjegyzés

A fenti példa megoldható az Euler-vonal használata nélkül is, de érdemes visszautalni a königsbergi hidakra, és megbeszélni, hogy az ábrát átrajzolhatjuk gráffá úgy, hogy minden termet egy-egy pontnak és minden ajtót egy-egy élnek veszünk (*7. ábra*). A megoldáshoz tehát egy alkalmas matematikai modell és egy hasonló, ismert probléma felhasználásával juthatunk el.



7. ábra

Definíció

Összefüggőnek az olyan gráfot nevezzük, amelynek bármely pontjából bármely pontjába vezet út.

Definíció

Fának nevezzük az olyan gráfot, amely összefüggő, és nem tartalmaz kört.

Tétel

Minden fának van elsőfokú pontja.

Tétel

Az *n*-pontú fának *n-1* éle van.

Tétel

Egy fának bármely élét elhagyva nem marad összefüggő gráf.

Tétel

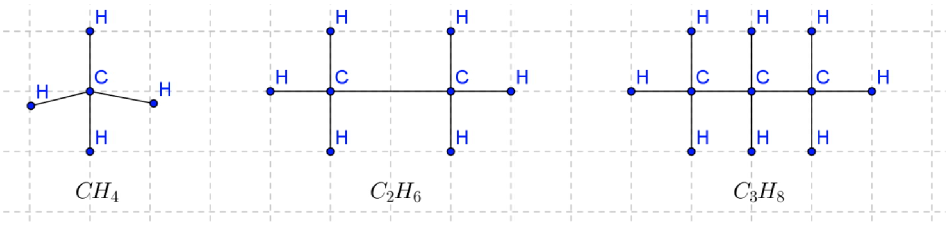
Egy fához bármely élt hozzávéve, nem marad körmentes.

Példa

A paraffinmolekulák általános képlete C_nH_{2n+2}. A molekulákat gráfokkal szemléltethetjük, amelyben a szénnek negyedfokú, a hidrogénnek elsőfokú pontok felelnek meg. Rajzoljuk meg az alábbi molekulák gráfjait! n = 1(metán), n = 2 (etán), n = 3 (propán)!

Megoldás

Mindhárom esetben fagráfot kapunk (*8. ábra*).



8. ábra

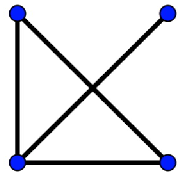
Példa

Igaz-e, hogy ha egy n-pontú összefüggő gráfnak n éle van, akkor a gráf egyetlen kör?

Megoldás

Ellenpélda megadásával. Lásd *9. ábra*.

9. ábra

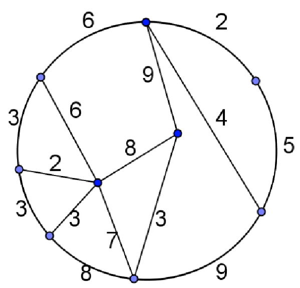


Példa
Rajzoljunk 7 szögpontú, nem összefüggő, 15 élű egyszerű gráfot!

Megoldás
Egy izolált pontból és egy 6-pontú teljes gráfból álló gráf.

Sokféle gazdasági feladat megoldása matematikai problémaként fogalmazható meg. Közöttük vannak olyanok is, amelyek gráfelméleti kérdésekhez vezetnek. Ilyen a következő példa, amely megmutatja, hogy a gráfelméleti ismeretek nagyon jól használhatók a gazdasági életben (is).

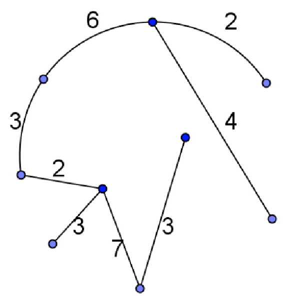
Példa
Kilenc települést földutak kötnek össze. Ezeket a helységeket aszfaltozott utakkal akarják összekötni úgy, hogy bármelyik településről bármelyikbe el lehessen jutni aszfaltúton. A *10. ábrán* látható az egyes utak építési költsége (millió forintban). A leggazdaságosabb megoldást keresik, vagyis az építési összköltség minimalizálására törekednek. Adjunk meg egy a feltételeknek megfelelő úthálózatot! Mennyi a minimális költség?



10. ábra

Megoldás

Összefüggő gráfot kell létrehoznunk. Ha egy körnek elhagyjuk valamelyik élét, akkor az új gráf összefüggő marad. A legnagyobb költségű élét elhagyjuk, és megnézzük, hogy az új gráfban van-e kör. Ha van, akkor megint elhagyjuk az abban legmagasabb költségű élt, stb. Az így kapott minimális költségű gráf egy *fa* (*11. ábra*). Most 9 pontunk volt, tehát 8 él marad. A minimális összköltség 33 millió forint. (A minimális költségű fa megkeresése nem mindig ilyen egyszerű, mint ebből a pár sorból látszik, de a problémát ezzel felvázoltuk.)



11. ábra

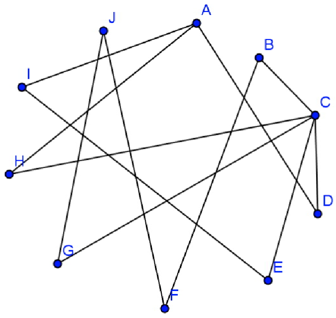
Az izomorf gráfok, síkba rajzolható gráf, komplementer gráf fogalmát átlagos csoportban nem szükséges pontosan definiálni sem, mert példán keresztül jól szemléltethetők és érthetők.

Példa

Egy munkahelyen 10 ember dolgozik. J meghallott egy pletykát A-ról. A pletykát mindenki továbbadja annak, akivel barátkozik. A 12. ábra mutatja, hogy ki kivel van baráti kapcsolatban.

a) Hány különböző úton juthat el a pletyka A-hoz?

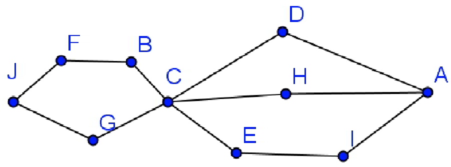
b) Valaki nem adta tovább a hírt, így a pletyka nem jutott el A-hoz. Ki lehetett a hallgatag munkatárs?



12. ábra

Megjegyzés

Könnyebb megválaszolni a kérdéseket, ha a gráfot átalakítjuk (*13. ábra*). A példával jól elmagyarázható az izomorf gráf jelentése, és még a használhatóságát is illusztrálja.

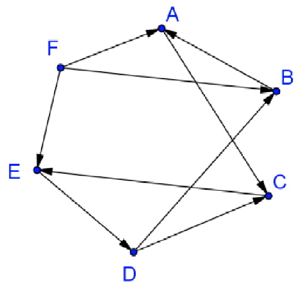


13. ábra

Nem törzsanyag, de az izomorf gráfokról, a síkba rajzolható gráfokról és az irányított gráfokról azért érdemes beszélni, mert összekapcsolhatjuk a gráfelmélet témakört gyakorlati alkalmazásokkal, geometriai, fizikai ismeretekkel. A három ház, három kút feladatra utalva értelmezhető a síkba rajzolható gráf fogalma. Alkalmazásként megemlíthetjük, hogy bizonyos hálózatok, pl. integrált áramkörök tervezésénél a gyakorlatban is fontos szempont, hogy egy adott gráf lerajzolható-e a síkba. Irányított gráffal szemléltethetünk nem szimmetrikus relációkat, vagy ezzel adhatjuk meg pl. nagy múzeumok kiállításainak bejárási útvonalát.

Példa

Egy iskolai focibajnokságon 6 csapat vesz részt, a lejátszott mérkőzéseket a *14. ábrán* látható irányított gráffal szemléltetjük. A nyíl a győztes csapatnak megfelelő pont felé mutat. a.) Van-e nyeretlen csapat? b.) A győztes csapat 3 pontot, a vesztes 0 pontot kap. Adjuk meg az egyes csapatok jelen állás szerinti pontszámát!



14. ábra

Megjegyzés

Ha van időnk és lehetőségünk, a GeoGebra programmal adhatunk olyan feladatot is, amelyben adott gráfot kell vele izomorf gráffá átalakítani úgy, hogy élei ne metsszék egymást. Ez a feladat, hasonlóan az adott fokszámú gráfok konstruálásához az ismereteket ugyan nem bővíti, de a kombinatív képesség fejlesztéséhez hozzájárul. A program arra is használható, hogy szemléltesse két gráf izomorfiáját.

Mint az eddigiekből láthattuk, a gráfelmélet témakör nagyon szerteágazó, színes, sok különböző feladat, matematikai érdekesség bemutatására ad lehetőséget. Mindig az adott csoport szintjétől, képességeitől, érdeklődési körétől függ, hogy ebbe a – középiskolában oly szűk – témakörbe mit érdemes beválogatnunk. A fejezetben azokat a fogalmakat és tételeket emeltük ki részletesen, amelyeket minden tanulónak ismernie kell, de mutattunk sok más lehetőséget is a gráfok szélesebb körű megismertetésére. Tudjuk, hogy a hálózatok ott vannak a mindennapjainkban. A diákjaink találkoznak velük tanórákon (pl. molekulaszerkezet rajza, uralkodók családfája, áramkörök, számítógépes hálózat, az osztály kapcsolatait leíró szociogram, keringési rendszer, rendszertani ábrák) és ezeken kívül is (pl. internet, elektromos hálózat, úthálózat, csatornahálózat, sportmérkőzések lebonyolítása). Említhetünk példát egyéb, tudományos alkalmazásokra (pl. neuronhálózatok az agykutatásban, bináris gráfok, döntési fa a vezetéselméletben vagy informatikában, gazdaságos fa a közgazdaságban, kapcsolati háló a marketingben, térképszínezés). Az alkalmazhatóság széles skálája miatt a témakör még azoknak a praktikus szemléletű diákoknak is érdekes lehet, akiket nem érdekel a matematika szépsége, de a gyakorlatban való hasznosságát értékelik.

A valós szám fogalma

A számfogalom kiépítése alsó tagozatban kezdődik a természetes számok halmazának megismerésével. A konkrét számolások kialakítják a tanulókban azt az ismeretet, hogy a természetes számok halmaza az összeadás és a szorzás műveletére nézve zárt halmaz. A kivonások elvégzése felveti a számhalmazok bővítésének igényét, így jutunk el az egész számok halmazához. Ebből a számhalmazból a negyedik alapművelet, az osztás vezet ki, és a racionális szám fogalmának értelmezésével kapunk egy olyan számhalmazt (Q), mely mind a négy alapműveletre nézve zárt. A racionális számok halmazának a műveletekre vonatkozó zártságát nem fogalmazzuk meg, de természetes módon használjuk a törtek fogalmának bevezetésétől kezdve a felső tagozat végéig.

A racionális szám fogalmát már 7. évfolyamon definiáljuk.

Definíció

Racionális számnak nevezzük azokat a számokat, amelyek megadhatók $\frac{a}{b}$ alakban, ahol $a, b \in Z, b \neq 0$.

Nyolcadik évfolyamon egy újabb művelet, a négyzetgyökvonás bevezetésével vetődik fel a számhalmazok újabb bővítésének szükségessége.

Példa

Határozzuk meg az adott befogójú derékszögű háromszög átfogójának hosszát!

a) a = 4 cm, b = 3 cm

b) a = 5, b = 7 egység.

Megjegyzés

Az a) feladatban a Pitagorasz-tétel ismeretében az átfogó meghatározása (c = 5 cm) nem okozhat gondot. A b) feladatban a négyzetgyökvonás ismerete nélkül csupán becsülni lehet az átfogó hosszát ($8 < c < 9$), számológéppel pontosabb becslést adhatunk (csak négyzetre emelést használva, iterációval). A számológépen a négyzetgyök billentyű használatának bemutatásával pontosabb értéket kaphatunk. Habár a Pitagorasz-tételt ismerő és számológépet használó diákokban általában nem merül fel a kérdés, hogy mit is jelent pontosan a $\sqrt{74}$, de ekkor lehet pontosítani a gyökvonás fogalmát, illetve beszélni az irracionális számokról.

E fogalmak bevezetése 9. évfolyamon a racionális számok tulajdonságainak vizsgálatával kezdődik. A racionális számok tizedestört alakjára vonatkozó tételek megfogalmazása előtt célszerű megbeszélni a következő példákat, majd ezek általánosításával juthatunk el a tételekhez.

Példák

(1) Írjuk fel tizedestört alakban a következő számokat!

$$\frac{15}{3};\quad -\frac{5}{2};\quad \frac{8}{3};\quad \frac{5}{7};\quad \frac{15}{173}$$

(2) Írjuk fel két egész szám hányadosaként a következő számokat!

$$6;\quad -0{,}65;\quad 23{,}145;\quad 2{,}\dot{3};\quad 14{,}\dot{3}5\dot{6};\quad 0{,}3\dot{4}5\dot{8};\quad 0{,}\dot{9}$$

Megjegyzések

Az (1) példa megoldása során véges vagy végtelen szakaszos tizedestörteket kapunk. Az utolsó tört esetében zsebszámológéppel nem tudjuk ellenőrizni, hogy tizedestört alakjában periodikusan ismétlődő szakaszok vannak, de a skatulyaelv alapján bizonyítható a racionális számok tizedestört alakjára vonatkozó állítás. Pl. az $\frac{5}{7}$ tört esetében célszerű a feladatot közösen, a táblára írva elvégezni, hiszen ezzel felismertethetjük, hogy a $q \neq 0,\ q \in N$ nevezőjű tört esetén a *0*-tól eltekintve legfeljebb *q – 1* különböző osztási maradék képződhet, azaz legfeljebb *q – 1* lépés után valamelyik ismétlődni fog, ami maga után vonja a szakasz kialakulását.

A (2) példa megoldásával eljárást adhatunk arra, hogyan lehet véges vagy végtelen szakaszos tizedestörteket felírni két egész szám hányadosaként. A végtelen szakaszos törtek esetében a következő eljárást követhetjük: a számoknak tekintsük olyan többszöröseit, melyekben az ismétlődő szakasz közvetlenül a tizedesvessző után következik. Két ilyen többszörös különbsége egész szám, ebből a keresett alak meghatározható.

Pl. legyen $0{,}3\dot{4}5\dot{6} = a \Rightarrow 10a = 3{,}\dot{4}5\dot{6}$,

$$10000a = 3456{,}\dot{4}5\dot{6} \Rightarrow 9990a = 3453 \Rightarrow a = \frac{3453}{9990}.$$

A példákban alkalmazott módszerrel alátámasztjuk azt az állítást, hogy az ilyen alakú tizedestörtek racionális számok. Az utolsó számról (a végtelen mértani sor fogalma nélkül) igazolhatjuk, hogy egyenlő *1*-gyel, példát mutatva a végtelen érdekes tulajdonságára. A mértani sorral az alapórára járó diákok nem találkoznak, ennek ismerete emelt szintű követelmény, 12. évfolyamon a sorozatok és a határértékszámítás ismeretére épülő anyagrész. Előző példánk megoldása mértani sor felhasználásával:

$$0{,}3\dot{4}5\dot{6}=0{,}3+\frac{456}{10000}+\frac{456}{10000000}+\frac{456}{10000000000}...=\frac{3}{10}+\frac{456}{10^4}\cdot\left(1+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+...\right)=$$

$$\frac{3}{10}+\frac{456}{10^4}\cdot\frac{1}{1-10^{-3}}=\frac{3}{10}+\frac{456}{9990}=\frac{3453}{9990}$$

A fenti példák általánosításaként megfogalmazhatjuk az alábbi tételeket.

Tétel

Minden racionális szám felírható véges tizedestört vagy végtelen szakaszos tizedestört alakban.

Tétel

Minden véges tizedestört vagy végtelen szakaszos tizedestört racionális szám.

Megjegyzés

A véges tizedestörteket is tekinthetjük végtelen szakaszos tizedestörteknek (a véges tizedestörtek után végtelen sok 0-t írva), ezért a tankönyvekben is találkozhatunk olyan megfogalmazással, amely csak végtelen szakaszos tizedestörteket említ.

Adódik a következtetés, hogy a végtelen nem szakaszos tizedestörtek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, tehát nem racionális számok. Így eljutunk az irracionális szám fogalmához.

Definíció

A végtelen nem szakaszos tizedestörteket *irracionális számoknak* nevezzük.

Példa

Adjunk meg olyan számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként!

Megjegyzés

A példában tehát irracionális számokat, végtelen nem szakaszos tizedestörteket kell előállítani. Végtelen sok jegy nem sorolható fel, így a szám megadásához szükséges valamilyen egyértelmű utasítás (pl. a tizedesvessző után növekvő sorrendben áll az összes pozitív egész szám).

A kerettanterv szerint a fejlesztési követelmények között szerepel gondolatmenetek követése és az érvelés is. Ezért javasolt bizonyítások tanítása is. A $\sqrt{2}$ irracionális voltának igazolása, a bizonyítás közös megbeszélése alapórán sem mellőzhető.

Tétel

A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

Bizonyítás

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a $\sqrt{2}$ racionális szám, tehát felírható két egész szám hányadosaként: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, ahol $a, b \in Z, \quad b \neq 0$ (indirekt feltevés). Az egyenletet négyzetre emelve:

$2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2b^2 = a^2$. A négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímszám páros kitevőn szerepel, így az egyenlet bal oldalán a $2b^2$ prímtényezős felbontásában a 2 prímszám kitevője páratlan, míg a jobb oldalán álló a^2 prímtényezős felbontásában a 2 kitevője páros (vagy nem szerepel a 2 prím). A számelmélet alaptétele szerint azonban ugyannak a számnak a prímtényezős felbontása csak a tényezők sorrendjében különbözhet, ezért az egyenlőség két oldalán nem állhat ugyanaz a szám. Az egyenlőség tehát nem teljesül, ez azt jelenti, hogy az indirekt feltevésünk sem lehet igaz, vagyis a tétel állítása igaz.

Megjegyzés

A tétel bizonyítása egyrészt klasszikus példája az indirekt bizonyítási módszer alkalmazásának, másrészt lehetőséget ad a racionális és az irracionális szám fogalmának ismétlésére, harmadrészt a számelmélet alaptételének is szép alkalmazása. A bizonyítás megértéséhez ugyanis elengedhetetlen a számelmélet alaptételének pontos, értő ismerete (mit jelent az, hogy a prímtényezős felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű).

A $\sqrt{n}$ alakú szám is irracionális, ahol n természetes szám és nem négyzetszám. Irracionális voltának bizonyítása hasonlóan elvégezhető, mint a $\sqrt{2}$ esetén.

A valós számok halmazát a racionális és az irracionális számok halmazának uniójaként kapjuk. A valós számok tehát a végtelen tizedestörtekkel megadható számok. A valós számoknak végtelen tizedestörtekkel való értelmezése a középiskolai tanulmányok során még egy helyen jelenik meg: a valós kitevőjű hatványok fogalmának bevezetésénél. (A *Hatvány, gyök, logaritmus* fejezetben.)

Példa

Döntsük el az alábbi számokról, melyek racionálisak és melyek irracionálisak! $1{,}325$; $2{,}\dot{1}\dot{7}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{324}$; $-\sqrt{45}$; $1{,}010110111\ldots$ (a 0-t mindig eggyel több 1 követi)

Megjegyzés

A példában csak valós számokat soroltunk fel, de érdemes megemlíteni, hogy – bár a racionális számok halmazából a négyzetgyökvonás műveletével léptünk ki – a négyzetgyökvonásra nézve a valós számok halmaza nem zárt (nem igaz, hogy bármely valós szám négyzetgyöke is valós). Ezt a számok négyzetgyökének definíciójában is figyelembe vesszük (csak nem negatív szám négyzetgyökét értelmezzük).

A matematika iránt nyitott diákjaink számára érdekes lehet az a probléma, hogy a négyzetgyökvonás műveletére nézve zárt halmaz létrehozása felveti a számhalmazok további bővítésének lehetőségét. Értelmezhetjük a negatív számok négyzetgyökét is, így bevezethető a képzetes, majd a komplex szám fogalma. Ezek tárgyalása azonban meghaladja a középiskolai tananyag kereteit.

A valós számokat számegyenesen ábrázoljuk: a valós számok halmaza és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető. A számegyenest tehát a valós számok teljesen kitöltik. A számegyenesen egy-egy szakasszal intervallumokat szemléltethetünk. Az intervallumok tanításánál hangsúlyozni kell, hogy – az előzőekből következően – bármely intervallum végtelen sok elemet tartalmazó halmaz, felsorolással nem adhatók meg az elemei.

Példa

Adjuk meg az $\left]\frac{1}{6};\frac{1}{5}\right[$ intervallum két racionális és két nem racionális elemét!

Megoldás

Használhatjuk a megadott számok közös nevezőre hozott és bővített alakját, vagy a tizedestört alakját a megoldáshoz. Pl. két racionális szám: $\frac{11}{60}$; 0,17; két irracionális: $0{,}1678910111213\ldots; \pi - 2{,}97$.

Megjegyzés

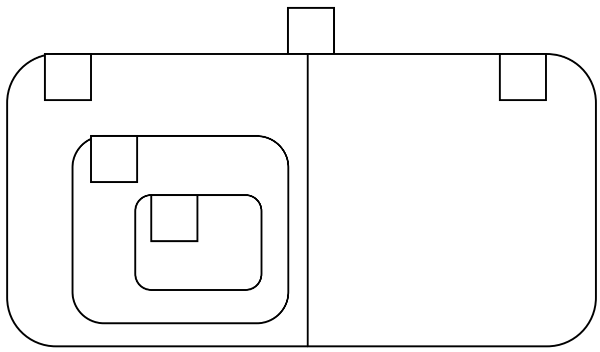
A példával utalhatunk arra, hogy a valós számok halmaza „mindenütt sűrű”, bármely két különböző valós szám között van újabb valós szám.

A valós számok tanítása során célszerű említést tenni (bár csak emelt szinten követelmény) a tanult számhalmazok számosságáról (**N**, **Z**, **Q** megszámlálhatóan végtelen, **R** kontinuum számosságú halmaz). Ezekről a *Halmazok* fejezetben részletesen írunk.

Példa

Egészítsük ki a halmazábrát (*1. ábra*) a számhalmazok jelével (**N, Z, Q, Q***, **R**)! Írjuk be a megfelelő helyekre az alábbi számokat!

$10 \quad \sqrt{5} \quad -\frac{15}{7} \quad 0 \quad -4 \quad 6{,}7\dot{4}\dot{5} \quad \frac{6}{2} \quad 1{,}8 \quad \frac{\pi}{3}$



1. ábra

Megjegyzés

A megoldás még 9. évfolyamon is szokott problémát okozni. A példa használható az irracionális szám fogalmának bevezetését követően, vagy a halmazok tanítása során. A feladat rávilágít az egyes számhalmazok közötti kapcsolatokra; segít elmélyíteni a valós szám fogalmát; fejleszti a rendszerező képességet.

5. FEJEZET

Hatvány, gyök, logaritmus

Bevezetésként meg kell jegyezni, hogy a hatvány, gyök, logaritmus ugyanazt a kapcsolatot fejezi ki három szám között, csak e számok összefüggését más-más szempontból vizsgáljuk. Tekintsük a $2^3 = 8$ egyenlőséget:

(1) $2^3 = c$

A hatvány**alap** és a hatvány**kitevő** ismeretében a hatvány értékét tudjuk kiszámolni.

(2) $a^3 = 8$

Ha az alap ismeretlen, akkor ennek meghatározása gyökvonással végezhető el: $a = \sqrt[3]{8} = 2$. Ekkor a 3-at gyök**kitevő**nek nevezzük.

(3) $2^b = 8$

Ha a kitevőt keressük, akkor logaritmussal számolhatunk: $b = \log_2 8$. A 2-t most a logaritmus **alap**jának nevezzük.

Tanulóink kognitív képességfejlődésének figyelembe vétele szükségessé teszi a matematikatanításban a tananyagok spirális felépítését. Ugyanazok a témák tehát többször is előkerülnek, magasabb évfolyamokon újabb és újabb tudáselemekkel kiegészülve.

5.1. A hatvány fogalma

A hatványozás fogalmával a diákok először 7. évfolyamon találkoznak: ekkor értelmezzük a pozitív egész kitevőjű hatványokat, és egyszerű példákon bemutatjuk a hatványozás azonosságait. A pozitív egész kitevőjű hatványok előfordulnak a prímtényezős felbontásban, a számrendszerek használata során, a számok normálalakjának megadásánál. A diákoknak kémia és fizika órákon is tudniuk kell normálalakban adott számokkal számolni. Az 1-nél kisebb számok normálalakjához szükség van a negatív kitevők használatára is. Kilencedik évfolyamon történik a hatványozás fogalmának kiterjesztése egész kitevőkre, a permanencia-elv alapján, azaz elvárjuk, hogy a hatványozás megismert tulajdonságai a kiterjesztést követően is érvényben maradjanak. A törtkitevőjű hatvány fogalmának értelmezésével 11. évfolyamon foglalkozunk, ekkor kerül sor a valós kitevőjű hatvány fogalmának szemléletes bevezetésére is.

A *pozitív egész kitevőjű hatványokat* a következő módon értelmezzük:

Definíció

$a^1 = a$; $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ n-tényezős szorzat, ha $n \in N$ és $n > 1$.

Tétel (A hatványozás azonosságai)

(1) $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

(2) $\dfrac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$, ahol $n>k$ és $a \neq 0$

(3) $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

(4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

(5) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, ahol $b \neq 0$

Az azonosságok helyes alkalmazásához sok gyakorlásra van szükség. A tipikus hibák elkerüléséhez (pl. a kitevők szorzása az összeadásuk helyett: $10^2 \cdot 10^3 = 10^6$) érdemes többször is levezetni a konkrét példában a definíció alapján a megfelelő azonosságot, amíg az nem rögzül.

Megjegyzés

A hatványozás azonosságai szorzat, hányados és hatvány hatványozására vonatkoznak. Összegre (különbségre) vonatkozó azonosság nincs (pozitív egész kitevőkre ezt a binomiális tétel adja meg). Vigyázzunk: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$!

Ha a hatványozást úgy kívánjuk kiterjeszteni *egész kitevőkre*, hogy az eddigi azonosságaink érvényben maradjanak, akkor a^0-nak 1-gyel kell egyenlőnek lennie. Ezt a következő gondolatmenettel indokolhatjuk: $\dfrac{a^n}{a^n} = 1$, illetve az azonos alapú hatványok osztására vonatkozó azonosság érvényben maradása esetén: $\dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$.

Ezek alapján értelmezhetők a negatív egész kitevőjű hatványok: $a^{-n}=a^{0-n}=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}$

Definíció

$a^0=1 \qquad (a\neq 0)$

$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad (a\neq 0,\quad n\in N^+)$

Belátható, hogy a hatványozás öt azonossága az így értelmezett egész kitevőjű hatványokra érvényes.

Példák

(1) Zsebszámológép használata nélkül adjuk meg a következő műveletek eredményét!

a) $\frac{8^5\cdot 2^8}{64^3\cdot 4^2}$ b) $\frac{6^3\cdot 50^2}{15^4}$ c) $\frac{\left(2^{-1}+5^0\right)\cdot 3^{-2}}{4^{-1}}$

(2) A Coulomb-törvény szerint két pontszerű töltés között ható erő nagyságát az $F=k\cdot\frac{Q_1\cdot Q_2}{r^2}$ képlettel számolhatjuk ki, ahol F a töltések által egymásra kifejtett erő (*N* mértékegységben), Q_1 és Q_2 a töltések nagysága, r a töltések távolsága, $k=9\cdot 10^9$ (mértékegysége $\frac{Nm^2}{C^2}$) az anyagi minőségtől függő állandó. Számítsuk ki a töltések által egymásra kifejtett erőt, ha $Q_1=2\cdot 10^{-4}\mathrm{C}$, $Q_2=3\cdot 10^{-5}C$, $r=3\cdot 10^{-1}\mathrm{m}$!

Megjegyzés

Az (1) példában a hatványozás azonosságainak és a negatív kitevőjű hatvány használatának gyakorlása mellett a prímtényezős felbontást és a törtekkel végzett műveleteket is gyakoroltatjuk. A (2) példa a tanultakra egy fizikai alkalmazást mutat, a megoldás matematikai tartalma egy egyszerű helyettesítési érték kiszámítása, amely normálalakkal való számolást igényel.

A *törtkitevős hatvány* értelmezése az *n*-edik gyök fogalmának megismerése után következhet. A permanencia-elv szem előtt tartásával az alábbi meghatározást adhatjuk.

Definíció

$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$, ahol $a \in R^+, \quad n \in Z, \quad k \in Z, \quad k > 1$.

Megjegyzések

- A hatvány hatványozására vonatkozó azonosság érvényben maradása esetén $\left(a^{\frac{n}{k}}\right)^k = a^{\frac{n}{k}\cdot k} = a^n$, ezért értelmezhetjük a törtkitevős hatványt $a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}$ alakkal.
- Belátható, hogy a fenti definíció esetén a hatványozás azonosságai érvényben maradnak.
- A gyökvonás azonosságának alkalmazásával igazolható, hogy a hatvány értéke nem függ a kitevőben szereplő tört alakjától. Pl. $(64)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(64)^2} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2 = (4)^2 = 16$, a kitevőt bővítve: $64^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{64^4} = \left(\sqrt[6]{64}\right)^4 = 2^4 = 16$.
- A törtkitevőjű hatványt csak pozitív alap esetén értelmezzük, egyébként ellentmondásra jutunk. Pl. $(-4)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2$, de $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ nem értelmezhető.
- Mivel az alap pozitív, ezért a hatvány értéke is pozitív. (Az exponenciális függvény értékkészlete $\mathbf{R}^+$.) Ezt később a logaritmus fogalmánál felhasználjuk.

A hatványfogalom további bővítésében nem tudunk a permanencia-elvre támaszkodni. Az *irracionális kitevőjű hatvány* értelmezése olyan ismereteket igényel, amelyek túlmutatnak a középiskolai tananyagon, ezért a fogalom bevezetésének lehetőségét általában egy példán mutatjuk be, az analízis megfelelő eszközeinek hiányában erősen támaszkodva a szemléletre. Először értelmezzük az $f: Q \to R,\ f(x) = 2^x$ exponenciális függvényt, és ábrázolás után vizsgáljuk a menetét. Megállapítjuk, hogy a függvény szigorúan monoton növekvő. A függvény grafikonjának ábrázolásakor megbeszélhetjük, hogy a görbe folytonosnak látszik (hiszen bármely két racionális szám között van újabb racionális szám, így a grafikon bármely két pontja között van újabb pont), de nem az, hiszen az irracionális számokhoz, pl. a $\sqrt{3}$-hoz nem rendel értéket. Hogyan értelmezhető a $2^{\sqrt{3}}$? Az irracionális kitevő értelmezésénél most az lesz a szempontunk, hogy az $f: R \to R,\ f(x) = 2^x$ függvény maradjon szigorúan monoton növekvő. A $\sqrt{3}$ értékét racionális számokkal közelíthetjük:

$1 < \sqrt{3} < 2$

$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

...

A $\sqrt{3}$ irracionális szám értékét egyre pontosabban közelítjük, és ez a közelítés a végtelenségig folytatható. Az exponenciális függvény szigorú monotonitását figyelembe véve:

$2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$

$2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$

$2^{1,73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74}$

...

végtelen sok egyenlőtlenségnek teljesülnie kell. (Az egymásba skatulyázott intervallumok végpontjai racionális kitevőjű hatványok.) Ezáltal $2^{\sqrt{3}}$ úgy definiálható, mint az a szám, melyet ez a végtelen sok egyenlőtlenség meghatároz. Hasonlóan értelmezhető bármely irracionális kitevőjű a^x ($a > 1$ vagy $0 < a < 1$) hatvány. Az 1^x értéke legyen 1.

5.2. A gyök fogalma

A négyzetgyökvonás művelete először 8. évfolyamon jelenik meg új ismeretként, mint a négyzetre emelés „megfordítása". A két művelet nem inverze egymásnak, hiszen négyzetre emelni negatív számot is lehet, de a négyzetgyökvonás eredménye csak nem negatív szám lehet (a valós számok halmazában). A két művelet kapcsolatára visszautalhatunk a másodfokú és a négyzetgyökfüggvény grafikonjának összehasonlítása során is.

A négyzetgyökvonás azonosságainak alkalmazása is elsősorban a 9-10. évfolyam feladata. Ekkor már elvárható a tanulóktól, hogy az algebrai kifejezésekkel végzett műveletekről és a nevezetes szorzatokról tanultak ismeretében, a gyökvonás azonosságainak felhasználásával tudjanak gyökös kifejezéseket átalakítani.

Általában 10. évfolyamon kerül sor a négyzetgyök fogalmának általánosítására, az n-edik gyökvonás értelmezésére. Ez ad lehetőséget (a következő évfolyamon) a törtkitevőjű hatványok definiálására.

Definíció

Az a nem negatív szám négyzetgyöke azt a nem negatív számot jelenti, melynek négyzete az a. (Ha $a \geq 0$, akkor $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ és $\sqrt{a} \geq 0$.)

Megjegyzés

Az $a \geq 0$ feltétel azért jelenik meg, mert valós szám négyzete nem lehet negatív, a $\sqrt{a} \geq 0$ feltétel pedig a művelet egyértelműségéhez szükséges. ($\sqrt{9} \neq -3$)

Tétel (A négyzetgyökvonás azonosságai)

($a, b \geq 0, \quad n \in Z$)

(1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $\qquad b \neq 0$

(3) $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$

Példák

(1) Vonjuk össze az alábbi kifejezéseket:

$2\sqrt{45} + \sqrt{20} - 3\sqrt{80}$

(2) Végezzük el a következő műveleteket:

a) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{20}}$ b) $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + 2ab}{x^4 \cdot y^6}}$

(3) Gyöktelenítsük a következő tört nevezőjét:

$\dfrac{6}{2\sqrt{3} - 3}$

Megjegyzés

A gyökvonás azonosságait is célszerű egyszerű példákkal illusztrálni (pl. könnyen kiszámolható, hogy $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{36}$; megmutathatjuk, miért könnyítheti meg ez a számolást: $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{100}=10$). Majd egyszerű alkalmazásokat begyakorolni (kiemelés a gyökjel elé, bevitel a gyökjel alá). A fenti példák megoldásához ezeknek az alkalmazása szükséges, a (2) és a (3) példában ezen kívül a nevezetes azonosságokat is használni kell. A (2) b.) megoldásánál figyeljünk arra, hogy bár $\left(\sqrt{k}\right)^2=k$, de $\sqrt{k^2}=|k|$. A (3) példában a nevező kéttagú négyzetgyökös kifejezés, ezért a megoldást a tört bővítésével kezdjük, felhasználva az

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

azonosságot: $\dfrac{6}{2\sqrt{3}-3}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3}=\dfrac{6(2\sqrt{3}+3)}{3}=4\sqrt{3}+6$.

Az n-edik gyökértelmezésénél is figyelembe vesszük a permanencia-elvet. A négyzetgyök fogalmánál említett okok miatt külön definiáljuk a páros, illetve a páratlan gyökkitevő esetét.

Definíció

Ha az *n* gyökkitevő páros szám ($n\geq 2$): az *a* nemnegatív szám <u>*n-edik* *gyöke*</u> azt a nemnegatív számot jelenti, melynek *n*-edik hatványa az *a.* (Ha $a\geq 0$, akkor $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ és $\sqrt[n]{a}\geq 0$.)

Ha az *n* gyökkitevő páratlan szám: az *a* ~~nemnegatív~~ szám <u>*n-edik gyöke*</u> azt a ~~nemnegatív~~ számot jelenti, melynek *n*-edik hatványa az *a.* $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

Megjegyzés

A törtkitevőjű hatvány definíciója szerint: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

A gyökvonás azonosságait a négyzetgyökvonás azonosságainak általánosításaként kapjuk, egy újabb tulajdonsággal bővítve.

Tétel (A gyökvonás azonosságai)

(1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $\quad b\neq 0$

(3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$

(4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

(páros gyökkitevő esetén $a,b\geq 0$)

A bizonyítás elve az, hogy ha az egyenlőség két oldalának n-edik hatványa azonos, akkor a két oldal is azonos. Páros n-re ez csak akkor igaz, ha a két oldal azonos előjelű is, most ez igaz, mert az eredeti egyenlőség két oldalán nem negatív számok állnak.

Megjegyzés
A gyökvonás azonosságai szorzat, hányados és hatvány gyökére vonatkoznak. Összegre (különbségre) vonatkozó azonosság nincs. Vigyázzunk: $\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$!

5.3. A logaritmus fogalma

Példa

a) Mennyivel egyenlő $(-2)^{-3}$; $3^7\cdot 3^{-5}$; $\sqrt[5]{32}$; $8^{\frac{2}{3}}$?
b) Melyik szám 4. hatványa 81?
c) A 2-t hányadikra kell emelni, hogy 64-et kapjunk?

Megjegyzés
A fogalmak rögzítése, a definíciók közvetlen alkalmazásának gyakorlása érdekében érdemes az órák elején néhány percet hatványokkal, gyökökkel való számolásra fordítani. A fenti példához hasonló fejben elvégezhető számolásokkal, villámkérdésekkel átismételhetjük a tanultakat, a gyengébbeknek is lehetőségük van a gyakorlásra és sikerélmény szerzésére, egyúttal ráhangolhatjuk a gyerekeket a tanulásra. Ilyen villámkérdésekkel akár a logaritmus fogalmát is bevezethetjük.

Példa

a) A 2-t hányadikra kell emelni, hogy 8-at kapjunk?

b) Az 5-öt hányadikra kell emelnünk, hogy $\frac{1}{25}$-öt kapjunk?

c) A 7-et hányadikra kell emelnünk, hogy $\sqrt{7}$-et kapjunk?

Megjegyzés

Ha ezekre a kérdésekre diákjaink jól válaszoltak, elégedetten lehet velük közölni, hogy máris tudnak logaritmussal számolni. Ez rögtön nagyobb motivációt jelent a továbbiak elsajátításához.

Definíció

A b pozitív szám a alapú logaritmusa ($\log_a b$) azt a kitevőt jelenti, amelyre az a-t kell emelni, hogy a b számot kapjuk. Azaz: $a^{\log_a b} = b$. ($a > 0$; $a \neq 1$)

Megjegyzés

A logaritmusértékek kiszámításánál eleinte célszerű átfogalmaztatni a kérdést a fent említett módon. Nem minden diák számára nyilvánvaló, hogy a definíció és a fenti képlet ugyanazt fejezik ki. A definíció alapján sok egyszerű példát kell mutatni erre (pl. $\log_2 8 = 3,$ mert $2^3 = 8,$ vagyis $2^{\log_2 8} = 8$).

Térjünk ki a definíciókban szereplő feltételekre. Mivel a törtkitevőjű hatványokat csak pozitív alap esetén értelmeztük, és az a szám az alap, ezért szükséges az $a > 0$ kikötés. Az a értéke azért nem lehet 1, mert ennek bármelyik hatványa 1 lenne. Minthogy pozitív szám bármilyen hatványa pozitív, és az a alap pozitív, ezért b is csak pozitív lehet.

Tétel (A logaritmus azonosságai)

($x, y > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$)

(1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(3) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

Megjegyzés

Az azonosságok közé sorolható a gyök logaritmusára vonatkozó azonosság, de a harmadik azonosság ezt is kifejezi törtkitevő esetén.

Megjegyzés

A logaritmus azonosságai szorzat, hányados és hatvány logaritmusára vonatkoznak. Összeg (különbség) logaritmusára vonatkozó azonosság nincs. Vigyázzunk: $\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$, illetve $\log_a(x+y) \neq \log_a xy$!

A korszerűbb zsebszámológépekkel általában már tetszőleges alapú logaritmussal lehet számolni, de a tanulóknak ismerniük kell, hogyan lehet áttérni más alapú logaritmusra.

Tétel

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ ahol } a,b,c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1.$$

A logaritmus fogalmát és azonosságait begyakoroltató feladatokon túl olyan feladatokat is oldjunk meg, amelyek a logaritmus alkalmazására mutatnak példát!

Példák

(1) Elhelyezünk a bankban 250000 forintot, melyre a bank évente 5%-os kamatot fizet. Hány év múlva lesz a betétünk értéke 400000 forint?

(2) A pH egy olyan kémiai mennyiség, amely egy adott oldat kémhatását jellemzi. Híg vizes oldatok esetén a pH érték egyenlő az oxóniumion-koncentráció (*mol/dm*^{3}) tízes alapú logaritmusának ellentettjével: pH= - lg(H_3O^+).

a) Szobahőmérsékleten 1 liter tiszta víz 10^{-7} mol oxóniumiont tartalmaz. Mennyi a tiszta víz pH értéke?

b) Egy tusfürdő pH értéke 5,5. Mennyi az oxóniumion-koncentráció ebben az oldatban?

(3) Határozzuk meg számológéppel az alábbi tört értékét!

$$\frac{68^{125} \cdot 201^{112}}{15^{332} \cdot 10^{91}}$$

Megjegyzés

Az (1) példa egy tipikus kamatos kamatszámítási feladat, amelyhez hasonlókat a mértani sorozatok megismerése után, 12. évfolyamon szoktunk gyakoroltatni. A (2) példában előforduló pH-érték fogalmát 9-10. évfolyamos kémiai tanulmányaik alatt megismerték a gyerekek, de a hétköznapokban is találkozhatnak vele. Hasonló példákkal a tantárgyak közötti kapcsolódási pontokra (tantárgyi koncentráció) tudunk rávilágítani. A (3) feladat kiszámítása hagyományos zsebszámológéppel csak úgy oldható meg, ha előbb vesszük az egész tört logaritmusát, az azonosságok segítségével kiszámoljuk ennek az értékét, majd a megfelelő alapot erre a kitevőre emelve kapjuk az eredményt. A példával bemutathatjuk, hogy a logaritmust a számolások gyorsításának igénye hozta létre, a számológépek feltalálása előtt bonyolultabb számításoknál nagy segítséget jelentettek a matematikusok által készített logaritmustáblázatok.

A hatványozás és a gyökvonás kapcsolatáról a hatványfüggvények és a gyökfüggvények ábrázolása, vizsgálata révén kaphatunk szemléletesebb képet. Ezt a függvénytani részt 10. évfolyamon tanítjuk. Itt tudunk először példát mutatni az inverz függvényekre. Hasonlóan érdemes 11. évfolyamon megvizsgálni az exponenciális és a logaritmusfüggvények kapcsolatát. Ezekről a *Függvények* fejezetben írtunk részletesebben.

6. FEJEZET

Algebrai kifejezések, azonosságok

A matematikának saját nyelve, jelölésrendszere van, bizonyos szimbólumok használata a középiskolában is elvárás. A betűs kifejezések használatára a matematika minden területén szükség van, nem csupán az algebrán belül, hiszen a számításokban, levezetésekben ezekkel dolgozunk. A reáltárgyak tanulása is igényli az egyszerű képletek megértését, a velük való számolást.

Az algebrai kifejezés fogalmát a szakirodalom többféleképp használja. A középiskolai tankönyvek algebrai kifejezés fogalma alatt *racionális algebrai kifejezést* értenek: *algebrai kifejezések* azok a betűs kifejezések, amelyekben legfeljebb a négy alapművelet és az egész kitevőjű hatványozás szerepel. Természetesen az egész kitevőjű hatványozás is visszavezethető a négy alapműveletre, ezért gyakori az a meghatározás is, hogy algebrai kifejezést kapunk, ha betűket és számokat a négy alapművelet véges sokszori alkalmazásával kapcsolunk össze. Az *irracionális kifejezésekben* ezek mellett a műveletek mellett a gyökvonás illetve a törtkitevőjű hatványozás is előfordul. *Transzcendens kifejezésekben* exponenciális kifejezések, logaritmus és/vagy szögfüggvények szerepelnek.

7-9. évfolyamig az algebra fejezeten belül több órát fordítunk az algebrai kifejezésekkel végzett műveletekre. Különösen a középiskola első évében (9. évfolyamon) hangsúlyos ez az anyagrész, mert áttekintjük, kibővítjük a korábban tanultakat, és a nevezetes azonosságok alkalmazásával együtt gyakoroljuk.

A betűs kifejezések használatakor meg kell adni azt a számhalmazt, amelynek elemeit helyettesítik a kifejezésben szereplő betűk (változók). Ez a kifejezés *alaphalmaza*. A kifejezés *értelmezési tartományát* az alaphalmaz azon elemei alkotják, melyeket a betűk helyére írva a kifejezés értelmezhető. Ha ez nincs megadva, akkor a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát értjük rajta, amelyben a kijelölt műveletek elvégezhetők. A változók helyébe konkrét számokat helyettesítve, majd a műveleteket elvégezve, a kifejezés *helyettesítési értékét* kapjuk.

6.1. Az algebrai kifejezések csoportosítása

1. egyváltozós és többváltozós kifejezés
   a) egyváltozós: pl. $6x^2$; $\frac{12y}{5}$; $\frac{2}{b}$
   b) többváltozós: $-4xy$; $-3a^2b^6$; $3a+2cx$; $\frac{xy}{5ab}$
2. egész és törtkifejezés
   a) egész: $4ax$; $6{,}8y^2zu$; $\frac{3a^3+2}{5}$ (nincs benne változóval osztás)
   b) törtkifejezés: $\frac{2}{n}$; $\frac{3a}{6xc}$; $\frac{2}{a+b}$
3. az egész kifejezés lehet egytagú vagy többtagú
   a) egytagú: $5x^2ab^6$; $\frac{3a}{5}$; $-2{,}6uv^2$
   b) többtagú: $3x+5by^4$; $3a^4+2a^3-a^2+8$; $\frac{5}{3}x^4-3$

A többtagú egész kifejezést <u>*polinomnak*</u> nevezzük.

4. az egytagú kifejezések lehetnek egyneműek vagy különneműek:
   a) egyneműek: $8x^3c^2$ és $-c^2x^3$ (legfeljebb az együtthatójukban különböznek)
   b) különneműek: $8x^3c^2$; $8x^3c^3$; x^3c^2a
      Összevonni csak egynemű kifejezéseket lehet.

Definíció
Algebrai egész kifejezés <u>*fokszáma*</u>:
   a) egytagú kifejezés fokszáma a benne szereplő változók kitevőinek összege,
   b) polinom fokszáma a legnagyobb fokszámú tag fokszáma.

6.2. Műveletek algebrai kifejezésekkel

Az algebrai kifejezésekkel végzett műveletek során felhasználjuk a valós számok műveleti tulajdonságait: a szorzás és az összeadás kommutativitását, asszociativitását, és a disztributivitást. Mivel számok helyett betűkkel dolgozunk, tudatosabban kell alkalmazni a műveleti sorrendről, zárójelhasználatról tanultakat.

Példák (polinomok összevonása, szorzása, szorzattá alakítása)

(1) Végezzük el a lehetséges összevonásokat!
$\left(3a^3b+4a^2b-8ab^2\right)+\left(13a^2b-5b^2a\right)-\left(9a^2b-2a^3b-10ab^2\right)$

(2) Végezzük el a következő szorzásokat!
a) $2x\cdot(3x^2)$
b) $(3ab)(-2a^3b^2)(-4ab^2x)$
c) $2x\cdot(3+x^2)$
d) $(a^2-3ab+b^2)(a^2-4ab)$

(3) Végezzük el a következő műveleteket!
a) $c^2-(c+1)(c+2)$
b) $3\cdot\left[2(x-y)+\dfrac{x}{3}\right]$

(4) Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket!
c) $2a^2-5a^3+a$
d) x^3+3x^2+3x+9

Megjegyzések

- Az (1) példában több dologra kell figyelni: az összevonásnál a mínusz előjel miatt a harmadik zárójel felbontásánál minden tag előjele megváltozik, illetve csak egynemű tagok vonhatók össze, de két tag akkor is egynemű, ha a változókat más sorrendben tartalmazzák.
- A (2) példa a) és b) feladatában a szorzás asszociativitását használjuk, itt a tipikus hiba, hogy a diákok $(ab)c=(ac)(ab)$ módon próbálnak szorozni. A disztributív tulajdonság azonban csak a két utolsó feladatban használható (itt szerepel többtagú kifejezés). Hasonló feladatok az együtthatók illetve a kitevők alkalmas megválasztásá-

val a törtekkel végzett műveletek és a hatványozás azonosságainak gyakorlására is alkalmasak.

- A (3) példa feladatainak egy-egy tipikus rossz megoldása:

  a) $c^2 - c^2 + c + 2c + 2 = 3c + 2$

  b) $6(3x - 3y) + x = 18x - 18y + x = 19x - 18y$

  Az a) feladat arra hívja fel a figyelmet, hogy a szorzat többtagú eredményét zárójelbe kell tenni, hiszen a kivonás minden tag előjelét változtatja. A b) feladatnál célszerű a belső zárójel felbontásával kezdeni a műveletet, így a már fentebb említett (2)a. hiba elkerülhető.
- A (4) példa első részéhez hasonló feladatokban elkövetett típushiba, hogy kiemelés után a zárójelben két tag lesz, az 1 lemarad, mivel az „a”-t kiemeltük. Ellenőriztessük visszaszorzással, illetve beszéljük meg, hogy a kiemelés során osztást végzünk el. A b. feladat a csoportosítással való kiemelésre mutat példát.

6.3. Nevezetes azonosságok

Számításainkban gyakran előfordulnak hasonló szerkezetű kifejezések, a velük való számolást, különösen a szorzattá alakítást könnyíti meg e speciális alakú kifejezések ismerete. Ezért célszerű néhány nevezetes azonosságot levezetni, majd – a szorzótábla memorizálásához hasonlóan - megtanulni. A nevezetes azonosságok egy részével már 8. évfolyamon találkoznak a diákjaink, 9. évfolyamon ezek körét bővítjük, és célunk a nevezetes szorzatok alkalmazás szintű megtanítása.

Azonosságnak az olyan egyenlőségeket tekintjük, amelyekben a két oldalon álló kifejezések helyettesítési értéke megegyezik a változók bármely lehetséges értéke esetén.

Nevezetes azonosságok

kéttagú összeg illetve különbség négyzete:

(1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

két tag összegének és különbségének szorzata:

(3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

háromtagú összeg négyzete:

(4) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

háromtagú összeg illetve különbség négyzete:

(5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(6) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

két tag köbének összege, illetve különbsége

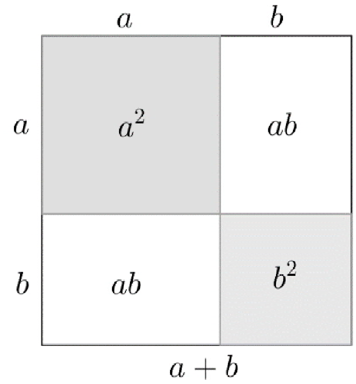
(7) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(8) $(a-b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - b^3$

Megjegyzés

A leggyakrabban az első három nevezetes szorzattal találkoznak diákjaink, ezért ezeket még a leggyengébb képességűeknek is fel kell ismerniük, és tudniuk kell alkalmazni. A (2), (6) és (8) azonosságokról mindenképp érdemes megjegyezni, hogy levezethetők a közvetlenül fölötte álló azonosságból, *b* helyett –*b*-t írva. Így nem okozhat gondot pl. $(-a-b)^2$ kifejtése sem az (1) alapján. Külön szerepeltetésüket gyakori előfordulásuk indokolja, a mínusz előjelek használata így jobban rögzül. Az azonosságok bal oldalán szorzat, a jobb oldalon összeg szerepel. A tanulóktól is várjuk el, hogy legyenek tisztában ezekkel az elnevezésekkel, ez a tudatosság segíthet a későbbi alkalmazások során.

Az algebrai azonosságok geometriai szemléltetése segítséget jelenthet azoknak a diákoknak, akik az algebra eszköztárával nehezen boldogulnak, de vizuálisan könnyebben feldolgoznak új információkat. (Egyszerű animációkat találhatunk az interneten.) Az azonosságok így jobban megjegyezhetők, illetve a geometriai szemléltetéssel rámutathatunk egy gyakran előforduló hibára, a vegyes szorzatok elhagyására. Például az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ azonosság szemléltetése (*1. ábra):*



1. ábra

Megjegyzés

A kéttagú összegek négyzetének és köbének összegalakját felírva érdeklődőbb osztályokban beszélhetünk az $(a+b)^n$ kifejtéséről (a binomiális tétel 11. évfolyamos tananyag), és a Pascal-háromszögről, amely már ismerős lehet, ha a halmazok témakörben ejtettünk szót róla (lásd *Halmazok* fejezet).

Az azonosságok alkalmazását gyakorló feladatok közül egyszerűbbnek bizonyulnak azok, amelyekben a szorzatalakot kell többtagú kifejezésként megadni. (Pl. az $(5a+2b)^2 = 25a^2 + 20ab + 4b^2$ átalakítás egyszerűbb, mint a $25a^2 + 20ab + 4b^2$ kifejezést szorzattá alakítani.) Az azonosságok alkalmazásánál tulajdonképpen ugyanazt kell tenni, mint a helyettesítési érték kiszámításánál, csak a változók helyére nem számokat, hanem kifejezéseket helyettesítünk. Ezeket a szorzásokat, hatványozásokat a tanult azonosságok nélkül is el tudnánk végezni, bár több időt venne igénybe. (Például egy kéttagú kifejezés köbét a három tényező szorzásának elvégzésével is kiszámolhatjuk.)

A nevezetes azonosságokat főként a szorzattá alakításoknál tudjuk hasznosítani. Az algebrai törtek összevonásánál, a törtes egyenletek megoldásánál arra törekszünk, hogy a legegyszerűbb közös nevezőt találjuk meg. Ez nem más, mint az egyes nevezőkben szereplő kifejezések legkisebb közös többszöröse, meghatározásához általában szükség van a nevezők szorzattá alakítására. A szorzattá alakítás módszerei a következők: kiemelés, kiemelés csoportosítással, nevezetes szorzatok alkalmazása, illetve – a másodfokú egyenleteknél, 10. évfolyamon megismert – gyöktényezős alak használata. Lehetséges, hogy a szorzattá alakítás csak több lépésben végezhető el, ekkor is törekedjünk arra, hogy a kifejezést a legegyszerűbb tényezőkre bontsuk.

Példa

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) $9a^2 - 36b^2$

b) $9 - x^2 + 2xy - y^2$

c) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$

d) $a^8 + a^4 + 1$

Megoldás

a) A kifejezés megadható $(3a-6b)(3a+6b)$ alakban is, de ekkor még mindkét tényezőből kiemelhetünk 3-at. Ha első lépésként a kiemelést végezzük el, majd ezt követően használjuk a nevezetes szorzatot, tovább már nem bontható tényezőkhöz jutunk:
$9(a^2-4b^2) = 9(a-2b)(a+2b)$

b) Két nevezetes szorzatot is felhasználunk, figyeljünk az előjelek változására:
$9-(x^2-2xy+y^2) = 3^2-(x-y)^2 = [3-(x-y)][3+(x-y)] = (3-x+y)(3+x-y)$

c) Csoportosítással kezdjük, majd nevezetes azonossággal folytatjuk:
$x^2(x+y) - y^2(x+y) = (x+y)(x^2-y^2) = (x+y)^2(x-y)$, másképp:
$x^3-y^3+xy(x-y) = (x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y) = (x-y)(x^2+2xy+y^2)$,
amiből megkaphatjuk a fenti, háromtényezős szorzatot.

d) Ennél a feladatnál alkalmazzuk a „teveszabályt”, adjuk hozzá és vonjuk is ki a^4-t: $a^8+2a^4+1-a^4 = (a^4+1)^2 - a^4$, innen a b) feladathoz hasonlóan folytatható.

A kéttagú kifejezés négyzetének ismerete azért is fontos, mert a későbbiekben többször is szükség lesz a teljes négyzetté kiegészítésre: a másodfokú egyenletek megoldásánál, a másodfokú függvény ábrázolásánál, koordinátageometriában a kör egyenleténél. Ezért praktikus ilyen jellegű feladatokat is gyakoroltatni.

Példák

(1) Egészítsük ki a következő kifejezéseket úgy, hogy egy kéttagú kifejezés négyzetével legyenek egyenlők!

a) $4x^2 + 4xy + \text{K}$

b) $25a^2 + \text{K} + 16b^2$

(2) Írjuk fel a következő háromtagú kifejezéseket egy teljes négyzet és egy szám összegeként!

a) $x^2 + 6x + 13$

b) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{5}a + \frac{11}{25}$

Az algebrai törtekkel végzett műveleteknek (egyszerűsítés, szorzás, osztás, összevonás) rutinná kell(ene) válniuk, hiszen a későbbiekben ezeket az eljárásokat eszközként szeretnénk használni, és nem szerencsés, ha egy összetettebb egyenlet vagy koordinátageometria feladat megoldása során problémaként merülnek fel a megoldáshoz szükséges lépések.

Példák

(1) Egyszerűsítsük a következő törtkifejezést!

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

b) $\dfrac{9a^2 + 18ab + 9b^2}{12a^2 - 12b^2}$

(2) Végezzük el a műveleteket!

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 3x} : \dfrac{x^2 + 5x}{x^2 - 9}$

b) $\dfrac{5}{x-3} - \dfrac{x+6}{x^2 - 9} + \dfrac{x+2}{2x+6}$

c) $\dfrac{a^2 - 4}{10a + 2} : \left(\dfrac{11a}{10a + 2} - 1\right)$

Megoldások

(1) Egyszerűsítésnél az első lépés a számláló és a nevező szorzattá alakítása, majd ezt követi a közös tényezővel(!) való egyszerűsítés. Tagonként nem lehet egyszerűsíteni! (Rossz eredmény az a) feladatban az *x-5*.)

(2) Törttel való osztás esetén szorozzunk az osztó reciprokával, majd érdemes az egyszerűsítésnél megismert eljárást követni: a számláló(k) és a nevező(k) szorzattá alakítása, a közös tényezőkkel(!) való egyszerűsítés, végül a szorzások elvégzése.

Az algebrai törtek összevonásánál először alakítsuk szorzattá a nevezőket (bontsuk a legegyszerűbb tényezőkre):

$$\frac{5}{x-3}-\frac{x+6}{(x+3)(x-3)}+\frac{x+2}{2(x+3)}$$

Állapítsuk meg a közös nevezőt, ennek megfelelően bővítsük a törteket:

$$\frac{2(x+3)\cdot 5}{2(x+3)(x-3)}-\frac{2(x+6)}{2(x+3)(x-3)}+\frac{(x-3)(x+2)}{2(x-3)(x+3)}$$

Végezzük el a műveleteket a számlálóban (használjunk zárójeleket az előjelhibák elkerülése érdekében),

$$\frac{10(x+3)-2(x+6)+(x^2-3x+2x-6)}{2(x+3)(x-3)}=\frac{10x+30-2x-12+x^2-3x+2x-6}{2(x+3)(x-3)}=$$

$=\dfrac{x^2+7x+12}{2(x+3)(x-3)}$, majd a kapott törtet egyszerűsítsük:

$$\frac{(x+4)(x+3)}{2(x+3)(x-3)}=\frac{x+4}{2(x-3)}=\frac{x+4}{2x-6}$$

A c.) részben figyeljünk a műveletek sorrendjére! A zárójelben előbb közös nevezőre kell hozni, és csak az így kapott tört reciprokával szorozhatunk. (Az eredmény $a+2$.)

A nevezetes azonosságok alkalmazására gyökös kifejezések átalakításainál is visszatérünk (9-10. évfolyamon). Ezekre láthatunk példákat a *Hatvány, gyök, logaritmus* fejezetben.

Az új tudáselemeket annál könnyebb megérteni, megjegyezni, minél többféle összefüggésben kell használni azokat. Az algebrai kifejezésekkel megtanult műveletek még kilencedikben visszaköszönnek az egyenletek megoldása, a gyökvonás azonosságainak alkalmazása, a nevezetes egyenlőtlenségek bizonyítása során, később pedig nemcsak a különféle egyenletek megoldásánál, hanem a sorozatok, a koordinátageometria vagy a trigonometria témakörben is szükség van a használatukra.

7. FEJEZET

Egyenletek, egyenlőtlenségek

Az egyenletek bevezetése általános iskolában kezdődik egyszerű matematikai problémából kiinduló vagy a mindennapi életből vett szöveges feladatok megoldásával. A feladatok próbálgatással, következtetéssel, visszafelé gondolkodással, ábrával való megoldását követi az ismeretlen mennyiség betűvel jelölése, a szöveg matematikai átfogalmazása, az így kapott egyenletek megoldása. A mérlegelv alkalmazásával, elsőfokú egyismeretlenes egyenletek és egyenlőtlenségek algebrai és grafikus megoldásával 7-8. évfolyamon foglalkoznak a tanulók. Az algebrai kifejezésekkel végzett műveletek megismerését követően már törtegyütthatós egyenletek megoldását is tanulják.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\frac{x+7}{2} - \frac{2x-1}{7} = x-1$

Kilencedik évfolyamon az egyenlet fogalmáról, különböző megoldási módszereiről esik szó, ekkor még döntően az elsőfokú egyenletek körében maradva; 10. évfolyamon ez a kör bővül a másodfokú egyenletekkel, majd 11. évfolyamon foglalkozunk exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenletekkel.

Az egyenlet, egyenlőtlenség fogalmát középiskolában kétféle módon szokás megadni.

Az első megközelítés az általános iskolából ismert „nyitott mondat" fogalmára épül. E szerint az egyenletet logikai függvénynek tekintjük, amelyből a változók helyébe konkrét számoknak (az alaphalmaz elemeinek) behelyettesítésével igaz vagy hamis állítást kapunk. Az egyenlet (egyenlőtlenség) megoldása során a cél a változók mindazon értékeinek meghatározása, amelyekre a kapott kijelentés logikai értéke igaz. Ezek a számok az egyenlet megoldásai (gyökei), halmazukat az egyenlet igazsághalmazának nevezzük.

A másik megközelítés szerint az egyenlet két függvény egyenlőségét fejezi ki. Az egyenlet értelmezési tartománya a két függvény értelmezési tartományának metszete. Az egyenlet megoldáshalmazát az értelmezési tartomány azon elemei alkotják, amelyeket a változó helyébe írva, a két függvény helyettesítési értéke egyenlő.

Megjegyzések

- Ez utóbbi értelmezésen alapul az egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldási módszere.
- *Azonosság* az olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen helyére az értelmezési tartomány bármely elemét behelyettesítve igaz állítást kapunk.
- *Ellentmondás* az olyan egyenlet, amelyben az ismeretlen helyére az értelmezési tartomány bármely elemét behelyettesítve hamis állítást kapunk.

7.1. Egyenletek megoldási módszerei

A továbbiakban a középiskolai követelményekhez igazodva elsősorban az egyismeretlenes egyenletek megoldásával foglalkozunk. Az egyenleteknek – számtalan típusa, fajtája lévén – nem létezik általánosan megadható megoldási módszere, azaz olyan eljárás, amellyel bármelyik egyenlet megoldható. Egy-egy konkrét egyenlet megoldásának is több módja létezik, ezek közül néhány gyakrabban előforduló, illetve speciális alakú egyenleteknél alkalmazható módszert sorolunk fel.

Grafikus megoldás: az egyenlet két oldalán álló függvényeket közös koordinátarendszerben ábrázoljuk. A két grafikon közös pontjainak x koordinátái adják a megoldás(oka)t.

Előnye: algebrai módon nehezebben megoldható egyenletek esetén is használható, illetve információt adhat a megoldások számáról.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $2^x = 3x - 1$ egyenletet!

Hátránya: előfordul, hogy nem tudjuk pontosan megadni a megoldásokat.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\frac{6}{x} = x^2 - 4$ egyenletet!

Mérlegelv: az algebrai megoldási módszerek alapelve, az egyenlet két oldalának egyforma változtatására épül. A mérlegelv szerint az egyenlet megoldáshalmaza (és értelmezési tartománya) nem változik, ha az egyenlet mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadjuk vagy mindkét oldalból ugyanazt a számot kivonjuk; ha mindkét oldalt ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk.

Megjegyzés
Lásd még az ekvivalens átalakításokról szóló részt a 70. oldalon.

Értelmezési tartomány vizsgálata: speciális esetekben az egyenlet értelmezési tartományának csak néhány eleme van, ezek behelyettesítésével eldönthető, melyek lesznek megoldások.

Példa
Oldjuk meg a valós számok halmazán a $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{2x-6}$ egyenletet!

Megoldás
A bal oldali kifejezés akkor értelmezhető, ha $9-x^2\geq 0$, azaz $3\geq |x|$, vagyis $-3\leq x\leq 3$, a jobb oldal akkor, ha $x\geq 3$. Az egyenlet értelmezési tartománya: $\{3\}$, tehát ha van megoldás, csak ez lehet. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy ez valóban megoldás.

Értékkészlet vizsgálata: speciális esetekben az egyenlet két oldalán álló kifejezések értékkészletének egy közös eleme van, tehát az egyenletnek csak ebben az esetben lehet megoldása.

Példa
Oldjuk meg a valós számok halmazán az $x^2+1=\cos x$ egyenletet!

Megoldás
A bal oldali kifejezés értékkészlete $[1;+\infty[$, a jobb oldalon állóé $[-1;1]$, tehát a két oldal csak akkor lehet egyenlő, ha mindkettő értéke 1. Ez az x^2+1 esetében az x = 0 esetén teljesül, ekkor a jobb oldal értéke is 1, vagyis ez (az egyetlen) megoldás.

Példa
Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az $(x+3)^2+|x^2-y^2|=0$ egyenletet!

Megoldás
A bal oldali kifejezés mindkét tagja nem negatív, összegük pontosan akkor 0, ha mindkét tag értéke 0. A megoldásként adódó *(x; y)* számpárok: (-3; 3), (-3; -3).

<u>*Szorzattá alakítás:*</u> speciális alakú egyenleteknél (pl. bizonyos magasabb fokú egyenleteknél) az egyik oldalt 0-ra redukáljuk, a másik oldalt szorzattá alakítjuk. Így elegendő az egyszerűbb szorzótényezőket vizsgálni.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\left(x^2-3\right)\sqrt{x-2}=2x\sqrt{x-2}$ egyenletet!

Megoldás

$\sqrt{x-2}\left[\left(x^2-3\right)-2x\right]=0$. Egy szorzat pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0, ebből $x_1=2,\quad x_2=-1,\quad x_3=3$ adódik, de -1 nem eleme az értelmezési tartománynak, ez nem megoldás.

<u>*Új ismeretlen bevezetése*</u>: bizonyos egyenleteket (pl. magasabb fokúakat) visszavezethetünk egyszerűbb egyenletekre.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\sqrt{x^2+3x+8}=x^2+3x-22$ egyenletet!

Megoldás

Ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, egy bonyolult negyedfokú egyenletet kapunk. E helyett vezessünk be egy új ismeretlent, a bal oldalt jelöljük y-nal! Egyenletünk $y=y^2-30$ alakú. Ebből y értéke 6 vagy -5. Utóbbi nem lehet, hiszen a négyzetgyök értéke nem negatív.

$\sqrt{x^2+3x+8}=6$ egyenletből az x = 4 és x= -7 megoldásokat kapjuk.

7.2. Ekvivalens átalakítások

Az egyenlet megoldása során arra törekszünk, hogy a megoldandó egyenletet minden lépésben egyszerűbb egyenletekkel helyettesítsük oly módon, hogy közben a megoldáshalmaz ne változzék meg. Az így kapott legegyszerűbb egyenletből a megoldás leolvasható. Ezeket az átalakításokat ekvivalens átalakításoknak nevezzük, az ilyen átalakításokkal kapott egyenleteket ekvivalens egyenleteknek. A mérlegelvnél említett átalakítások mellett ekvivalens átalakítás az is, ha az egyenlet egyik vagy mindkét oldalát vele azonos kifejezéssel helyettesítjük (pl. zárójeleket felbontunk, elvégezzük a kijelölt műveleteket, összevonunk). Az ekvivalens átalakítások során tehát nem veszítünk gyököt, és nem kapunk hamis gyököt (olyan megoldást, amely az eredeti egyenletnek nem megoldása), így az utolsó egyenletben kapott megoldások az eredeti egyenlet megoldásaival megegyeznek. Ekvivalens átalakításokkal kapott megoldások ellenőrzése tehát elvileg nem szükséges, de tanácsos, a számolási hibák kiküszöbölése céljából.

A mérlegelvnél nem említettük, hogy az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatjuk vagy kivonhatjuk belőle ugyanazt az ismeretlent tartalmazó kifejezést, illetve szorozhatunk vagy oszthatunk ugyanazzal az ismeretlent tartalmazó, 0-tól különböző kifejezéssel. Az ilyen átalakítás is *lehet* ekvivalens, de előfordulhat az is, hogy – pl. az értelmezési tartomány változása miatt - hamis gyököt kapunk, illetve gyököt veszítünk. A következőkben ezekre nézünk néhány példát.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az $4x-\sqrt{3x-9}=8-\sqrt{3x-9}$ egyenletet!

Megoldás

$$\begin{aligned} 4x-\sqrt{3x-9} &= 8-\sqrt{3x-9} \qquad / +\sqrt{3x-9} \\ 4x &= 8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

A 2 nem megoldás, erről ellenőrzéssel meggyőződhetünk. A 2 ugyanis nem eleme az eredeti egyenlet értelmezési tartományának: $\{x \in R \mid x \geq 3\}$, amelyet viszont az első lépésben – az ismeretlent tartalmazó kifejezés hozzáadásakor - megváltoztattunk.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\dfrac{x^2}{x-3}+2x=\dfrac{9}{x-3}$ egyenletet!

Megoldás

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-3}+2x &= \frac{9}{x-3} \qquad \cdot(x-3) \\ x^2+2x(x-3) &= 9 \\ x^2+2x^2-6x &= 9 \\ 3x^2-6x-9 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+108}}{6}=\frac{6\pm 12}{6}$$

$x_1=3 \quad x_2=-1$

A 3 nem megoldás, mert nem eleme az eredeti egyenlet értelmezési tartományának ($x \neq 3$), amely viszont az első lépésben – az ismeretlent tartalmazó kifejezéssel való szorzás során – kibővült **R**-re.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\log_3 x^2 = 2$ egyenletet!

Megoldás

a.) (hibás) Alogaritmus azonosságai szerint:

$$2\cdot\log_3 x = 2$$

$$\log_3 x = 1$$

$$x = 3$$

b.) A logaritmus definíciója szerint:

$$x^2 = 3^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm 3$$

Az ellenőrzésből látható, hogy mindkét szám megoldása az eredeti egyenletnek. Az a.) megoldásban ismét változott az értelmezési tartomány, de most szűkült (az eredeti kikötés: $x \neq 0$ helyett $x > 0$ lett az új feltétel), ezért az első megoldási módszerrel gyököt veszítettünk. (A korábbi példákkal ellentétben, ahol az értelmezési tartomány bővülése miatt gyököt „nyertünk”.)

Megjegyzés
Természetesen ez nem azt jelenti, hogy nem használhatjuk a logaritmus azonosságait, csupán körültekintően kell eljárnunk: az azonosságok feltételeként szerepelt, hogy a változók pozitív számok. Az a) megoldást módosíthatjuk ennek figyelembe vételével:

$2 \cdot \log_3 |x| = 2$ (így változatlan marad az értelmezési tartomány: $x \neq 0$)

$\log_3 |x| = 1$

$|x| = 3$

Példa
Oldjuk meg a valós számok halmazán az $\sqrt{5x^2 + 100} = 3x$ egyenletet!

Megoldás
Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!

$5x^2 + 100 = 9x^2$

$100 = 4x^2$

$25 = x^2$

$x_{1,2} = \pm 5$

A -5 nem megoldás, erről ellenőrzéssel meggyőződhetünk. Az egyenlet értelmezési tartománya most nem változott, a hamis gyököt a négyzetre emelés miatt kaptuk. Az ellenőrzés során jól látszik, hogy ha -5-öt helyettesítünk vissza az eredeti egyenletbe, a két oldal értéke csak előjelben különbözik.

Megjegyzés
A hamis gyökök kiszűrésében az értékkészlet vizsgálata is segíthet. A négyzetgyökös egyenletek megoldásánál még visszatérünk a problémára.

Példa
Oldjuk meg a valós számok halmazán az $2x(x-2) = 6(x-2)$ egyenletet!

Megoldás

a) (hibás)

$2x(x-2) = 6(x-2) \qquad :(x-2)$

$2x = 6$

$x = 3$

A 3 megoldása az egyenletnek, de könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a 2 is az, holott ezt az eredményt nem kaptuk meg. A gyökvesztés oka az ismeretlent tartalmazó kifejezéssel való osztás (a kifejezés értéke lehet 0 is, 0-val viszont nem osztunk!).

b) Az ismeretlennel való osztás akkor tűnik kézenfekvő ötletnek, ha ugyanaz a kifejezés minden tagban szerepel. A fenti hibát kiküszöbölhetjük a következő módon: rendezzünk minden tagot az egyenlet egyik oldalára, majd a közös tényezőt emeljük ki!

$$2x(x-2)-6(x-2)=0$$

$$(x-2)(2x-6)=0$$

A szorzat akkor és csak akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Ebből mindkét gyököt megkapjuk.

Megjegyzés

Hamis gyököt általában akkor kaphatunk, ha az egyenletet négyzetre emeljük, vagy az értelmezési tartományát bővítő átalakítást hajtunk végre. A gyökvesztés pedig többnyire akkor fordul elő, ha ismeretlennel osztunk, vagy az értelmezési tartományt szűkítjük. A fenti példák is mutatják, hogy a hamis gyököket ellenőrzéssel kiszűrhetjük (ha véges sok megoldást kapunk!), azonban a gyökvesztés az ellenőrzésnél sem derül ki!

7.3. Néhány egyenlettípus

Az alábbiakban a középiskolai matematikatanítás során előforduló fontosabb egyenlettípusokat, megoldási módszereiket, és a megoldások kritikus pontjait tekintjük át példákon keresztül, elsősorban az alapórán előkerülő problémákra szorítkozva.

7.3.1. Elsőfokú egyenletek

Középiskolában az elsőfokú egyenletek közül a törtes egyenletek gyakorlására érdemes több figyelmet fordítani. A diákok általános iskolás korukban foglalkoznak törtegyütthatós egyenletekkel, kilencedikben tanulnak az algebrai törtekről. A törtes egyenletek megoldása során ezeket az ismereteiket kell mozgósítaniuk, és erre kívánunk építeni 10. évfolyamon a másodfokú egyenletek tárgyalásakor.

Törtes egyenletnek az olyan egyenletet nevezzük, amelyben szerepel betűs kifejezéssel való osztás, míg törtegyütthatós egyenlet nevezőjében csak számok állhatnak. Törtes egyenletek megoldásában a legegyszerűbb közös nevező megtalálása szokott gondot okozni. Itt támaszkodnunk kell az algebrai törtekről tanultakra. (Lásd *Az algebrai kifejezések, azonosságok* fejezet, 57. oldal.) Mindkét feladattípusnál az előjelhibák előfordulása a leggyakoribb.

Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$\frac{x-1}{4}-\frac{2x-1}{9}+5=x$$

Megjegyzés

A példában egy törtegyütthatós egyenlet szerepel. Ezekhez hasonló feladatok megoldásával már 7-8. évfolyamon foglalkozunk, de még középiskolában is gyakran problémát okoz a megoldása. Sok diák először bővíti a két törtet úgy, hogy 36 legyen a közös nevező, majd szorozza az egyenletet 36-tal. Itt két tipikus hibalehetőség van: (1) csak a törteket szorozza, az egész kifejezéseket nem, (2) nem veszi figyelembe a bal oldal második tagjának előjelét. Az előjelhibák megelőzése érdekében érdemes arra figyelmeztetni a tanulókat, hogy a többtagú számlálókat mindig tegyék zárójelbe, amikor beszoroznak a közös nevezővel. A zárójelek felbontásakor jobban oda tudnak figyelni az előjelekről tanultakra.

Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$5-\frac{12}{x^2-16}=\frac{2x+2}{x+4}-\frac{3x-16}{4-x}$$

Megjegyzés

Törtes egyenleteket célszerű az értelmezési tartomány vizsgálatával kezdeni, így az esetleges hamis gyökök rögtön kiszűrhetők. Az $x^2-16=(x+4)(x-4)$ átalakítás után látható, hogy az egyik tényező a jobb oldalon levő második nevező ellentettje. Ilyen esetekben egy -1-szeres bővítéssel elérhetjük, hogy ezek a kifejezések megegyezzenek:

$5-\frac{12}{(x+4)(x-4)}=\frac{2x+2}{x+4}+\frac{3x-16}{x-4}$, tehát a közös nevező: $(x+4)(x-4)$.

7.3.2. Abszolútértékes egyenletek

A kerettantervi szabályozás és a középszintű érettségi vizsga követelményei szerint $|ax+b|=cx+d$ típusú, egy abszolútértéket tartalmazó egyenletet mindenkinek meg kell tudnia oldani.

Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

a) $|5x+3|=28$

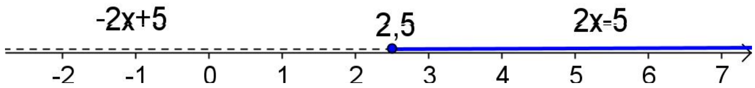
b) $|2x-5|=x-1$

Megoldás

A hasonló feladatok megoldásánál célszerű említést tenni a grafikus megoldásról. Ezzel a megoldási módszerrel átismételhetjük a függvényekről tanultakat.Algebrai módszerrel mindkét feladatot az abszolútérték fogalmából kiindulva lehet megoldani, tehát két esetre bontva.

Az a) példánál a legegyszerűbb azt végiggondolni, melyik az a szám, amelynek abszolútértéke 28. A két eset: $5x+3=28$ és $5x+3=-28$.

A b) részben az abszolútértékes kifejezés nem egy számmal egyenlő, a két esetet az abszolútértékben álló kifejezés vizsgálatával kezdjük:



Ha $2x-5<0$, $x<2{,}5$	Ha $2x-5\geq 0$, $x\geq 2{,}5$
akkor a negatív szám abszolútértéke az ellentettjével egyezik meg:	akkor az abszolútérték elhagyható:
$-2x+5=x-1$	$2x-5=x-1$
$x=2$	$x=4$

Ne feledjük a kapott egyenletek megoldását összevetni a rájuk vonatkozó feltétellel!

Úgy tűnhet, hogy az a) részbeli feladatot másképp oldottuk meg, valójában teljesen mindegy, melyik oldal előjelét változtatjuk.

Ha az egyenlet több abszolútértékes tagot tartalmaz, a megfelelő feltételeket együtt kell vizsgálni.

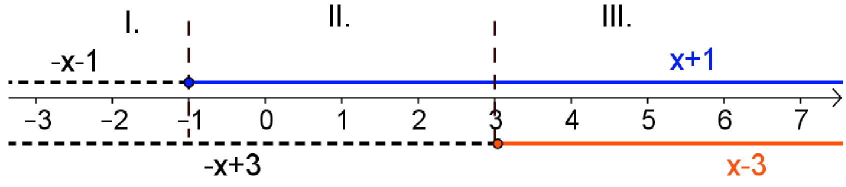
Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$|x+1|+|x-3|=4$

Megoldás

Az előző feladathoz hasonlóan megvizsgáljuk a két abszolútértékben álló kifejezés előjelét. Az első a -1-nél, a második a 3-nál vált előjelet. E két szám a számegyenest három intervallumra bontja, ennek megfelelően elegendő három esetet vizsgálni:



Ha $x<-1$, akkor az abszolútértékekben negatív számok állnak, ezért helyettük az ellentettjüket írhatjuk:

$-x-1-x+3=4 \Leftrightarrow -2x+2=4 \Leftrightarrow x=-1$, ami a feltétel miatt nem megoldás.

Ha $-1\le x<3$, akkor az első abszolútértékben álló kifejezés nem negatív, tehát az abszolútértéke önmaga, a másik még mindig negatív, így helyette az ellentettjét írjuk:

$x+1-x+3=4 \Leftrightarrow 4=4$ azonosságot kapjuk, vagyis a feltételnek eleget tevő számok mindegyike megoldás.

Ha $3\le x$, akkor mindkét abszolútértékben álló kifejezés nem negatív, az abszolútérték elhagyható: $x+1+x-3=4 \Leftrightarrow 2x-2=4 \Leftrightarrow x=3$, ami a feltételnek megfelel.

A megoldáshalmaz: $[-1;3]$.

Megjegyzés

Miért fontos a feltételek vizsgálata?A feltételek felírása nélkül, a két abszolútértékjel felbontásának minden esetét végigvizsgálva (összesen 4 eset) is eljuthatunk a megoldásokhoz. Ha véges számú eredményt kapunk, az ellenőrzéssel kiszűrhetjük, melyek a tényleges megoldások (amelyek a feltételeknek is megfelelnek). A fenti példa mutatja, hogy ez nem mindig tehető meg, hiszen ha azonosságot kapunk, a megoldásokat nem lehet ellenőrizni, viszont nem állíthatjuk, hogy bármely valós szám megoldás.

7.3.3. Paraméteres egyenletek

A paraméteres egyenletek megoldásának ismerete emelt szintű követelmény, de a másodfokú egyenletek tárgyalásánál is előkerülnek olyan feladatok, amelyben paraméterek szerepelnek, illetve bizonyos alkalmazásokban (kémiai, fizikai, pénzügyi feladatokban) is előfordulnak.

A paraméteres feladatok egyik típusa az, amelyben a feladat mindössze az egyenlet megoldása. Másik típusa ezeknek a feladatoknak, amelyekben meghatározott feltételeknek megfelelő paramétert keresünk. (Ez utóbbira a másodfokú egyenleteknél mutatunk példát.)

Megjegyzés

A feladatban egyértelműen meg kell különböztetni az ismeretleneket a paraméterektől! (Általában az ismeretlent *x, y, z...,* a paramétert *a, b, c, p, m* betűvel jelölik.)

Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán, ha a valós paraméter!

$$a^2x - 15 = 5a - 3ax$$

Megoldás

Az egyenletet úgy rendezzük át, hogy egyik oldalon az ismeretlent tartalmazó tagok, másik oldalon ismert tagok (számok, paraméter) álljanak. Az ismeretlent kiemeljük, ha szükséges, majd kifejezzük:

$$a^2x + 3ax = 5a + 15$$

$$x\left(a^2 + 3a\right) = 5a + 15 \quad (*) \qquad :\left(a^2 + 3a\right) \neq 0$$

$$x = \frac{5a+15}{a^2+3a} = \frac{5(a+3)}{a(a+3)} = \frac{5}{a} \qquad (a \neq 0,\ a \neq -3)$$

Ekkor még nem vagyunk készen, hiszen osztottunk a paraméteres kifejezéssel, feltéve, hogy 0-tól különböző szám. Meg kell vizsgálnunk azt az esetet is, amikor a kifejezés értéke 0. Az eredeti egyenlet helyett (*) egyenletbe helyettesíthetünk (itt még nem szerepel a paraméterrel osztás):

Ha $a = 0$ (*) bal oldala: 0, jobb oldala 15 $\Rightarrow$ nincs megoldás

Ha $a = -3$ (*) bal oldala: 0, jobb oldala 0 $\Rightarrow$ bármely valós szám megoldás.

Megjegyzés

A megoldásokat tehát a paraméter(ek) összes megengedett értékére meg kell adnunk. Ha a feladatban az ismeretlenre valamilyen feltételt kell szabni (pl. nevezőben szerepel), akkor a kapott eredményt is meg kell vizsgálni, hogy mely paraméter értékek esetén teljesül a feltétel.

7.3.4. Szöveges feladatok

A szöveges feladatok tanításának fontossága indokolja, hogy minden adódó alkalommal oldassunk meg a tanulókkal szöveges feladatokat is, legyen szó akár első- vagy másodfokú, akár exponenciális, logaritmikus egyenletekről vagy sorozatokról. Az ilyen feladatok megoldása kompetencia jellegű tudást jelent, hiszen a tanult eljárásokat ismeretlen szituációban kell alkalmazni. A szöveges feladatok megoldásának nehézségét a megfelelő matematikai modell megadása jelenti, vagyis a szöveg alapján a megfelelő egyenlet felírása.

A szöveges feladatok változatossága végtelen, de fogódzókat adhatunk bizonyos típusfeladatok megoldásának bemutatásával. Ilyen feladatokkal tanítványaink már általános iskolában találkoznak az arányosság, a százalékszámítás fogalmával kapcsolatban is, az elsőfokú egyenletek tanításánál pedig általában előkerülnek számjegyekkel, életkorral, egyenletes mozgással kapcsolatos, együttes munkára vonatkozó, keverési és geometriai jellegű feladatok. Szöveges feladatok megoldása során fordítsunk elegendő időt és figyelmet a szövegbeli összefüggések megkeresésére, az ismeretlen célszerű megválasztására. Gyakran lehet – és érdemes – az adatainkat táblázatba rendezni, ábrát készíteni, így jobban láthatóvá válik a mennyiségek közötti kapcsolat. Ne feledjük, hogy megoldásainkat a szöveg alapján kell ellenőrizni, és nem elég az ismeretlent megadni, a kérdésre kell (szövegesen) válaszolni! A szöveges feladatok egy része egyenletek alkalmazása nélkül is megoldható, de csak teljes megoldást fogadjunk el!

7.3.5. Másodfokú egyenletek

Definíció

Az $ax^2+bx+c=0,\quad (a,b,c\in R,\ a\neq 0)$ egyenletet *másodfokú egyenletnek* nevezzük.

A másodfokú egyenletek tanítását többnyire olyan feladatokkal vezetjük be, amelyekben hiányos másodfokú egyenleteket kell megoldani, ezt követően teljes négyzetté alakítással, illetve teljes négyzetté kiegészítéssel oldunk meg egyenleteket. A teljes négyzetté kiegészítés módszerét már az algebrai kifejezéseknél megismerték a tanulók. Néhány ilyen feladat megoldása során némi gyakorlatot szereznek diákjaink, miközben szembesülnek a módszer nehézkességével, és felmerül az igény valami egyszerűbb megoldási módszerre. A megoldóképlet ezt az igényt elégíti ki, levezetése nem más, mint a fenti módszer általános alkalmazása, ezért történhet egy konkrét feladat lépéseivel párhuzamosan.

Tétel

A *másodfokú egyenlet megoldóképlete*: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet *diszkriminánsa* $D = b^2 - 4ac$. A diszkrimináns megadja a másodfokú egyenlet valós gyökeinek számát:

Ha $D > 0$, az egyenletnek két különböző valós gyöke van,
ha $D = 0$, az egyenletnek egy megoldása (két azonos valós gyöke) van,
ha $D < 0$, az egyenletnek nincs valós gyöke.

Tétel

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor *gyöktényezős alakja*: $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Tétel (Viète-formulák)

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ és $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Példa

Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$$2 - \frac{1}{2 - x} = \frac{6 - x}{3x^2 - 12} - \frac{3 - x}{x - 2}$$

Megjegyzés

A példában szereplő törtes egyenlet megoldása közben csak jól ismert, korábban már begyakorolt lépéseket kell alkalmazni, de mégsem mondható könnyűnek. Fel kell ismerni egy nevezetes szorzatot, -1-gyel bővíteni kell az egyik törtet, a közös nevezőre hozás során figyelni kell az előjelekre, rendezni kell az egyenletet, megoldóképletet használni, és még az ellenőrzés sem a legkönnyebb, mert az egyik megoldás tört. (Megoldások: $\frac{2}{3}$ és -3.)

Példa

Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $5x^2 - 19x + p = 0$ egyenletben teljesüljön, hogy a.) az egyik gyök 3, b.) a gyökök egyenlők, c.) a két gyök különbsége 0,2!

Megjegyzés

a) Hasonló feladatot érdemes a Viète-formulák tanítása után kitűzni. Megoldásának menete a gyökök és együtthatók összefüggései alapján: $3 + x_2 = \frac{19}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{4}{5}$, illetve $3 \cdot x_2 = \frac{p}{5}$ felhasználásával p = 12. Ilyen példát azért érdemes feladni, mert arra az egyszerű tényre hívhatjuk fel a tanulók figyelmét, hogy mit jelent az, hogy egy szám az egyenlet gyöke: a számot az ismeretlen helyébe írva az egyenlőségnek teljesülnie kell. Remélhetőleg van olyan diák az osztályban, akinek ez eszébe jut, és a feladatot a Viète-formulák használata nélkül egyszerűbben így oldja meg: $5 \cdot 3^2 - 19 \cdot 3 + p = 0 \Rightarrow p = 12$.

A b) részben a diszkrimináns fogalmát használhatjuk fel.

A c) rész a Viète-formulák felhasználásával könnyen megoldható. A Viète-formulák nélkül is célt érhetünk, ha a megoldóképletet felhasználjuk. Így egy négyzetgyökös egyenlet megoldásával adódik p keresett értéke:

$$x_1 - x_2 = 0{,}2$$

$$\frac{19 + \sqrt{19^2 - 4 \cdot 5 \cdot p}}{10} - \frac{19 - \sqrt{19^2 - 4 \cdot 5 \cdot p}}{10} = 0{,}2$$,ahonnan p = 18.

Példa

Bontsuk fel elsőfokú tényezők szorzatára a következő többtagú kifejezést!

$$24a^2 + 37a - 72$$

Megoldás

A gyöktényezős alakot használjuk:

$$24\left(a - \frac{9}{8}\right)\left(a + \frac{8}{3}\right) = (8a - 9)(3a + 8).$$

7.3.6. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek

A másodfokú egyenlet megoldóképletének levezetésekor szorgalmi feladat vagy tanulói kiselőadás témája lehet egy matematikatörténeti kitekintés a magasabb fokú egyenletek megoldhatóságáról. Az $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ alakú egyenletek másodfokúra való visszavezetése és megoldása középszinten követelmény. Az ilyen típusú egyenletek megoldásánál mutatjuk meg az új ismeretlen bevezetésének módszerét.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet! $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

Megjegyzés

Az új ismeretlen bevezetése, és a példához hasonló egyenletek másodfokúra visszavezetése nem szokott problémát okozni még a gyengébb diákoknak sem. Az viszont gyakori hiba, hogy amikor az új ismeretlen páros kitevőjű hatványt jelöl (példánkban x^2-et), a végeredményben lemarad a negatív gyök. Példánkra visszatérve: legyen

$x^2 = a \Rightarrow a^2 - 9a + 20 = 0$ megoldásai:

$a_1 = 4,\ a_2 = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2,\quad x_{3,4} = \pm\sqrt{5}$.

7.3.7. Másodfokúra visszavezethető gyökös egyenletek

Középszinten, vagyis alapórán $\sqrt{ax + b} = cx + d$ típusú négyzetgyökös egyenletek megoldásának ismerete a követelmény. Az ilyen típusú egyenletek mellett érdemes megoldani néhány olyan egyenletet is, amely több négyzetgyököt tartalmaz, csak többszöri négyzetre emeléssel oldható meg.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\sqrt{x - 2} + 4 = x$

Megoldás

Az egyenlet $x \geq 2$ feltétel mellett értelmezhető. Átrendezzük az egyenletet úgy, hogy a gyökös tag magában szerepeljen (az eredeti alakban a bal oldal kéttagú, négyzetre emeléssel a kétszeres szorzatban maradna gyökös kifejezés), majd négyzetre emelünk:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2} &= x-4\\ x-2 &= x^2-8x+16\\ 0 &= x^2-9x+18\end{aligned}$$

$x_1 = 6 \quad x_2 = 3$

Mindkét szám eleme az értelmezési tartománynak, de az ellenőrzésnél azt kapjuk, hogy a 3 hamis gyök.

Megjegyzés

A hamis gyököt az értékkészlet vizsgálatával is kiszűrhetjük. Négyzetre emelés előtt az egyenlet bal oldala négyzetgyökös kifejezés, tehát nem negatív. Ebből következik, hogy a jobb oldalnak is nem negatívnak kell lennie, tehát: $x \geq 4$ feltételnek teljesülnie kell. E szerint a 3 hamis gyök.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\sqrt{x} + \sqrt{2x+2} = 3$

Megoldás

ÉT: $x \geq 0$. Az egyenletet nem tudjuk úgy rendezni, hogy a gyökös tag mellett ne legyen még egy tag. Az első négyzetre emelés után továbbra is marad gyökös tag:

$$\begin{aligned}x+2x+2+2\sqrt{x(2x+2)} &= 9\\ 3x+2+2\sqrt{2x^2+2x} &= 9\\ 2\sqrt{2x^2+2x} &= 7-3x\\ 4(2x^2+2x) &= 49-42x+9x^2\\ 0 &= x^2-50x+49\end{aligned}$$

$x_1 = 49 \quad x_2 = 1$

Ellenőrzés vagy ÉK vizsgálat (3. sor) alapján csak az x=1 a megoldás.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\sqrt{x^2+2x+1} - 1 = x$

Megjegyzés

a) (hibás megoldás)

ÉT: **R**

$$\sqrt{x^2+2x+1} = x+1$$
$$x^2+2x+1 = x^2+2x+1$$

Azonosságot kaptunk. A megoldás **R**.

b) Az előbbi megoldás során nem vettük figyelembe, hogy a négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás. Ellenőrzéssel nem kaphatjuk meg a hamis gyököket (végtelen sok megoldás van). Az értékkészletet vizsgálva azonban felírhatjuk (az 1. sor alapján): $x+1 \geq 0$. Tehát a megoldáshalmaz: $\left[-1;+\infty\right[$.

c) Négyzetre emelés helyett most a gyökvonás elvégzése célravezetőbb.

$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$, ezért egyenletünk:

$|x+1|-1 = x \Leftrightarrow |x+1| = x+1$, ami az abszolútérték értelmezése szerint azt jelenti, hogy: $x+1 \geq 0$, vagyis a megoldás: $x \geq -1$.

7.3.8. Exponenciális egyenletek

A hatványozás valós kitevőkre vonatkozó kiterjesztését követően (11. évfolyamon) kerül sor exponenciális egyenletek megoldására. Exponenciális egyenletekben az ismeretlen a kitevőben szerepel. Érettségin a definíciók és a hatványozás azonosságainak közvetlen alkalmazásával megoldható exponenciális egyenleteket tűzhetnek ki. Ezek gyakran exponenciális egyenletre vezető valós problémák (pl. hitel, értékcsökkenés, népesség alakulása, radioktivitás stb.) formájában jelennek meg.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{1}{8} \cdot \sqrt[4]{4^{3x-1}} = 8^{-\frac{2}{3}}$$

Megoldás

Mindkét oldalon **egytagú** kifejezés áll, ezért az egyenletet nem rendezzük, hanem a hatványozás definícióit, illetve azonosságait használva a két oldalt azonos alapú hatványként írjuk fel:

$$2^{-3} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{3x-1}{4}} = \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$2^{-3+\frac{3x-1}{2}} = 2^{-2}$$

Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a két azonos alapú hatvány csak akkor lehet egyenlő, ha kitevőik megegyeznek:

$$-3 + \frac{3x-1}{2} = -2$$

$$x = 1$$

Példa

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $3^{x-2} + 4 \cdot 3^{x-1} + 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{x+1} = 4$

b) $4^{x+\frac{1}{2}} + 31 \cdot 2^{x-1} = 4$

Megoldás

a) Az egyenlet egyik oldala **többtagú**, és nem rendezhető át úgy, hogy a két oldalon egytagú kifejezések legyenek, de a hatványalapok egyformák. Ilyen esetben a kitevőket írjuk fel egyszerűbb alakba, felhasználva a hatványozás azonosságait!

$$\frac{3^x}{3^2} + 4 \cdot \frac{3^x}{3} + 5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x \cdot 3 = 4$$

Innen a közös nevezővel való beszorzás és a kijelölt műveletek elvégzése, összevonás, rendezés után kapjuk a megoldást. Az egyszerűnek tűnő feladat sok hibalehetőséget rejt azok számára, akik bizonytalanok a hatványozás azonosságaiban vagy a műveleti tulajdonságokban. Számukra megkönnyíti a megoldást egy új ismeretlen bevezetése: 3^x helyett a-t írva:

$\frac{a}{9} + \frac{4a}{3} + 5a - 6a = 4$ alakba írhatjuk az egyenletünket. Ebből $a = 9$, így $x = 2$.

b) esetben hasonló átalakításokkal, 2^x helyett új ismeretlent bevezetve, a következő másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2a^2 + \frac{31}{2}a - 4 = 0$$

Ennek megoldásai: $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = -8$. Előbbiből $x = -2$, utóbbinak nincs megoldása, mert $2^x > 0$.

Példa

Ha az eredetileg I_0 (*W/m²*) intenzitású lézersugár x mm mélyre hatol egy anyagban, akkor ebben a mélységben az intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}}$ (*W/m²*) lesz. Ezt az anyagot I_0 = 800 (*W/m²*) intenzitású lézersugárral világítják meg. Mekkora mélységben lesz a behatoló sugár intenzitása az eredeti érték 15%-a?

Megjegyzés

A tanulók egy része nehéznek találja az ilyen feladatokat. Megfelelő szöveges feladatok megoldásával leküzdhető a kezdeti ellenállás, mert megmutathatjuk, hogy a matematikai lényeget tekintve nem nehéz problémákról van szó. Példánkban a $0{,}15 = 0{,}1^{\frac{x}{6}}$ exponenciális egyenlet megoldását logaritmus segítségével kaphatjuk meg.

7.3.9. Logaritmikus egyenletek

Az exponenciális egyenletek egy részének megoldásához is szükség lehet a logaritmus fogalmának alkalmazására. Logaritmikus egyenletnek az olyan egyenletet nevezzük, amelyben az ismeretlennek a logaritmusa szerepel. Az exponenciális egyenletekhez hasonlóan a logaritmikus egyenletek is gyakran valós problémák matematikai leírásaként fordulnak elő.

Példa

Egy új típusú, alacsony nyomások mérésére kifejlesztett mérőműszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0{,}8 \lg p_v + \lg 2$ összefüggés áll fenn (mindkét nyomást *Pa* mértékegységben megadva). Mekkora a valódi nyomás, ha a műszer 50 *Pa* értéket mutat?

A továbbiakban néhány egyszerűbb, a definíció és a logaritmus azonosságainak alkalmazásával megoldható feladattípust veszünk sorra.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\log_3\left[2 + \log_6\left(9 - \log_2 x\right)\right] = 1$

Megoldás

Általában érdemes az egyenleteket az értelmezési tartomány felírásával kezdeni, de ennél a feladatnál ez most hosszadalmas volna (három egyenlőtlenség vizsgálata), a megoldások ellenőrzésével kiderül, ha az eredmény nem eleme az értelmezési tartománynak. A **logaritmus definíciója** szerint:

$[2+\log_6(9-\log_2 x)] = 3^1$, rendezés után:

$\log_6(9-\log_2 x) = 1$, ismét a definíció alapján:

$9-\log_2 x = 6$, az előző lépéseket ismételve:

$\log_2 x = 3$, amiből x = 8 (ellenőrizve) megoldás.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\lg(x-3)+\lg(x-2) = 1-\lg 5$

Megoldás

Az egyenlet akkor értelmezhető, ha $x > 3$. A jobb oldalon az 1 helyett a logaritmus definíciója szerint lg10-et írunk, majd alkalmazzuk a **logaritmus azonosságait**:

$$\lg(x-3)(x-2) = \lg\frac{10}{5}$$

A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt a két (azonos alapú) logaritmus pontosan akkor lehet egyenlő, ha argumentumaik megegyeznek:

$(x-3)(x-2) = 2$

$x^2-5x+4 = 0$

Ebből $x_1 = 4$ és $x_2 = 1$, de utóbbi nem eleme az értelmezési tartománynak, tehát nem megoldás.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\log_7 x + 2\log_{\frac{1}{7}} x = \log_{49} x - 3$

Megoldás

ÉT: x > 0. **Közös alapra** térünk át, ez legyen az egészek közül a kisebb.

$$\log_7 x + 2 \cdot \frac{\log_7 x}{\log_7 \frac{1}{7}} = \frac{\log_7 x}{\log_7 49} - 3$$

$$\log_7 x + 2 \cdot \frac{\log_7 x}{-1} = \frac{\log_7 x}{2} - 3$$

Ebből $\log_7 x = 2$, azaz x = 49 a megoldás.

7.3.10. Trigonometrikus egyenletek

A szögfüggvények általánosításakor, 10. évfolyamon, egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldására (pl. $\sin x = 0{,}8$) már van lehetőségünk, tanulóink rendelkeznek a megfelelő ismeretekkel. Hasonló egyenletek megoldása elmélyíti a szögfüggvény fogalmát, tudatosítja a periodicitását. A trigonometria alkalmazásaival viszont 11. évfolyamon foglalkozunk, ennek részeként oldunk meg különböző típusú trigonometrikus egyenleteket. Trigonometrikus egyenletnek az olyan egyenletet tekintjük, amelyben az ismeretlen valamelyik szögfüggvény argumentumában szerepel. Kerettantervi és érettségi követelmény az egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldása. Az ezekhez szükséges alapvető szögfüggvények közötti kapcsolatok alkalmazása elvárható, de az addíciós tételeket csak emelt szinten tanítjuk.

A trigonometrikus egyenletekre sem lehet általános megoldási módszert találni, ám ezeket is érdemes bizonyos típusfeladatok megoldásának bemutatásával tanítani, fokozatosan haladva a legegyszerűbbektől az összetettebb egyenletek felé.

Megjegyzés

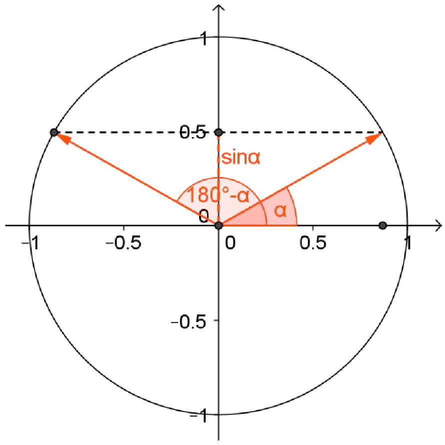
A trigonometrikus egyenletek megoldását általában fokokban vagy radiánban is megadhatjuk. Ha az alaphalmaz a valós számok halmaza, a megoldást radiánban adjuk meg! Semmiképp ne keverjük a kétféle mértékegységet!

Példa
Oldjuk meg a következő egyenletet!

a) $\sin 5x = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $\cos(x + 60°) = \cos 2x$

Megoldás
a) Két eset lehetséges: a szögek periódustól eltekintve vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek (*1. ábra*).



1. ábra

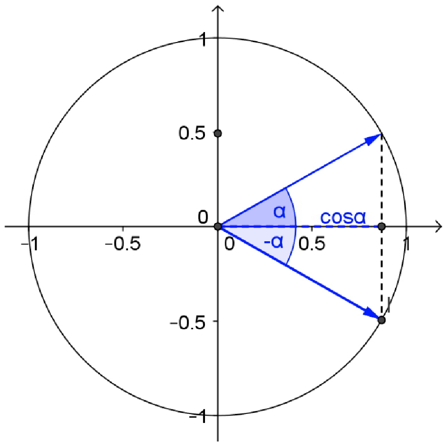
1. eset: $5x = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \qquad k \in Z$

2. eset: $5x = \pi - \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + n2\pi$

$x = \frac{2\pi}{9} + n\frac{\pi}{3} \qquad n \in Z$

b) Két eset lehetséges: a szögek periódustól eltekintve vagy egyenlők, vagy ellentett szögek (*2. ábra*).



2. ábra

1. eset: $x+60° = 2x + k360°$ | 2. eset: $x+60° = -2x + n360°$

$x_1 = 60° - k360° \qquad k \in Z$ | $x_2 = -20° + n \cdot 120° \qquad n \in Z$

Megjegyzések

- Figyeljünk arra, hogy a helyes megoldást többféle alakban is felírhatjuk, pl. a b) részben másik periódust választva az $x_2 = 100° + n \cdot 120°$ is helyes megoldás.
- A $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$ illetve a $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta$ egyenletek megoldása annyival egyszerűbb, hogy – mivel egy perióduson belül ezek a függvények szigorúan monoton tulajdonságúak – elegendő egy esetet vizsgálni, a szögek csak periódusukban különbözhetnek.
- Az exponenciális és a logaritmusfüggvénnyel ellentétben a trigonometrikus függvények nem szigorúan monoton függvények, ezért a fenti típusú egyenleteknél nem tehetjük meg, hogy „elhagyjuk a szögfüggvényeket”.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\sin 3x = \cos x$

Megjegyzés

A $\sin\alpha = \cos\beta$ és a $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta$ típusú egyenleteknél a pótszögek szögfüggvényei közötti összefüggéseket használjuk fel:

$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, illetve $\text{ctg}\,\alpha = \text{tg}\,(90° - \alpha)$. A példában szereplő egyenlet e szerint a következő alakban írható fel: $\sin 3x = \sin(90° - x)$, ami az előző példában ismertetett típusú egyenlet.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

a) $\text{tg}\,3x = -\,\text{tg}x$

b) $\cos 2x = -\cos x$

Megoldás

a) Az értelmezési tartományt tangens és kotangens esetében vizsgáljuk meg: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ $(k \in Z)$. A tangensfüggvény páratlan, ezért $-\text{tg}\,(x) = \text{tg}\,(-x)$, így példánk megoldása:

$$\text{tg}\,3x = \text{tg}(-x)$$

$$3x = -x + k\pi$$

$$x = \frac{k\pi}{4} \qquad k \in Z$$

Megjegyzések

- A b) részben szereplő koszinuszfüggvény páros, ezért az előbbi eljárás nem használható. E helyett a definíció alapján belátható $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ összefüggést használhatjuk, vagy a pótszögekre vonatkozó kapcsolat szerint az előző példában ismertetett módon szinusz szögfüggvényre térünk át, az egyenlet mindkét oldalán. A $\sin x$, $\text{tg}\,x$, $\text{ctg}\,x$ mindegyike páratlan, ezért

  a $\sin\alpha = -\sin\beta$, $\text{tg}\alpha = -\,\text{tg}\,\beta$, $\text{ctg}\,\alpha = -\,\text{ctg}\,\beta$ esetekben a mínusz előjeltől a példa a.) részében bemutatott módon „szabadulhatunk meg”.
- A $\sin\alpha = -\cos\beta$, $\text{tg}\,\alpha = -\,\text{ctg}\,\beta$ típusú egyenleteknél az előző két példában említett módszereket kombináljuk.
- A b.) részben felírt egyenlet a kétszeres szögek szögfüggvényének felhasználásával visszavezethető másodfokú egyenletre.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$3\sin x = \sqrt{3}\cos x$

Megoldás

A $\cos x$ nem lehet 0, mert akkor az egyenlet jobb oldalának is 0-val kell egyenlőnek lennie, de $\sin x$ és $\cos x$ egyszerre nem lehet 0. Ezért oszthatunk $\cos x$-szel, majd felhasználjuk, hogy $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$. Így egyenletünk: $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, azaz $x = 30° + k \cdot 180°$.

Megjegyzés

Az $a \cdot \sin^n x = b \cdot \cos^n x$ alakú egyenletek megoldhatók a fenti módon, $\operatorname{tg}^n x$ -re visszavezetve az egyenletet.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$2 \cdot \sin x = \operatorname{tg} x$

Megoldás (1)

ÉT: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$. A szorzattá alakítás módszerét fogjuk használni.

$$2\sin x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$2\sin x \cdot \cos x = \sin x$$

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = k\pi, \quad k \in Z \qquad x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi, \quad x_2 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad l, n \in Z.$$

Megjegyzés

Vigyázzunk, a 2. sorban $\sin x$ -szel osztás gyökvesztést eredményez!

Megoldás (2)

A 2. sorból a kétszeres szögek szögfüggvényének felhasználásával:

$\sin 2x = \sin x$

1. eset: $2x = x + k \cdot 2\pi$ 2. eset: $2x = \pi - x + n \cdot 2\pi$

$x = k \cdot 2\pi \quad k \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{n2\pi}{3} \quad n \in Z$.

Megjegyzés

Úgy tűnik, az előző megoldással más eredményeket kaptunk. Ez azonban nem így van, erről az egy periódusba eső megoldások felsorolásával (vagy ábrázolásával) meggyőződhetünk.

Trigonometrikus egyenleteknél előfordul, hogy az eredmény alakja függ a megoldás módjától, erre érdemes felhívni tanulóink figyelmét.

Példa

Oldjuk meg a következő egyenletet!

$2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$

Megoldás

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggés felhasználásával az egyenletet másodfokú egyenletre vezetjük vissza:

$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 4 = 0$

$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$, bevezethetünk egy új ismeretlent ($\cos x = y$)

$-2y^2 + 5y - 2 = 0$

$y_1 = 2 \quad y_2 = \frac{1}{2}$

Az első nem ad megoldást, mert $\cos x \le 1$, a másikból $x_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad l, n \in Z$.

Láthattuk, hogy egyenletek megoldása minden évfolyamon, és szinte minden témakörben előfordul. Változatosságuk, a megoldásukhoz szükséges előismeretek sokasága megnehezíti a tanításukat. Bizonyos egyszerű egyenletfajták megoldása azonban egyszerű algoritmusokkal megadható, ezek minden tanuló számára sikerélményt, ezáltal kellő motivációt biztosíthatnak.

7.4. Egyenlőtlenségek

Az egyenlőtlenségek megoldását az egyenletekkel együtt tanítjuk. Általános iskolai ismeret, hogy az egyenlőtlenségek megoldása során a negatív számmal való szorzásra, osztásra kell jobban odafigyelni, mert ekkor megváltozik az egyenlőtlenség iránya. Ez az egyszerűbb egyenlőtlenségek megoldásánál nem is szokott problémát okozni. Az elsőfokú törtes egyenlőtlenségek tanításánál azonban már hangsúlyozni kell, hogy a feladat megoldását azért kell két esetre bontani, mert a nevező előjelét nem ismerjük (hiszen tartalmazza az ismeretlent).

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{3x-8}{x+3}<1$$

Megoldás

Szorozhatunk a nevezővel, ahogyan egyenlet esetében tennénk, de most két esetet vizsgálunk: ha a nevező pozitív, az egyenlőtlenség iránya nem változik; ha a nevező negatív, az egyenlőtlenség iránya megfordul. A másik megoldási módszer, hogy először nullára redukáljuk az egyik oldalt, a másikat közös nevezőre hozás után egyetlen törtté alakítjuk, majd a kapott tört nullához való viszonya alapján a tört számlálójának és nevezőjének előjelét vizsgáljuk.

Megjegyzés

Bármelyik utat választjuk, lényegében két elsőfokú egyenlőtlenségrendszert kell megoldanunk. A helyes megoldáshoz tisztában kell lenni az egyes lépések közötti logikai kapcsolattal, illetve ennek megfelelően helyesen kell alkalmazni az intervallumok metszetéről, uniójáról tanultakat.

A másodfokú egyenlőtlenségek megoldására érdemes többféle megoldási módszert bemutatni. Az algebrai módszer alkalmazásakor a gyöktényezős alak segítségével szorzatként megadott egyenlőtlenséget kell megoldani. Ez az elsőfokú törtes egyenlőtlenségek fent említett második megoldásával mutat analógiát: most a tényezők előjelének vizsgálatával adódó egyenlőtlenségrendszerekre vezethető vissza a feladat. A módszer hátránya, hogy ha nincsenek valós gyökök, a szorzattá alakítás sem végezhető el. A másik módszer a grafikus megoldás. A másodfokú függvény teljes négyzetté kiegészítés után ábrázolható, a megoldások leolvashatók. A módszer hátránya lehet – az ábrázolás esetleges nehézsége mellett – a zérushelyek pontos értékének megadása, ha azok nem egész számok. A két módszer előnyeit ötvözi a harmadik eljárás: a zérushelyek meghatározása algebrai úton történik, majd a függvény grafikonjának felvázolásával grafikus úton fejezhető be.

Hasonló módon érdemes a trigonometrikus egyenlőtlenségek megoldásait meghatározni: algebrai úton megvizsgálni az egyenlet (!) megoldásait, majd grafikus úton megadni az egyenlőtlenség megoldáshalmazát.

Az exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek megoldásánál is a megfelelő függvények tulajdonságait használjuk fel.

Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$\log_2(x-2) < 2$

Megoldás

A jobb oldalt 2 alapú logaritmussal írjuk fel, majd felhasználjuk a 2 alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő tulajdonságát. A megoldandó egyenlőtlenség ezért $x-2<4$, az értelmezési tartományra felírt $x>2$ feltétel mellett.

Megjegyzés

Nem elég azt tudni, hogy az exponenciális és logaritmusfüggvények menetének jellege az alaptól függ; a feladat megoldását csak akkor értik meg a tanulók, ha tisztában vannak a szigorú monoton növekedés, illetve csökkenés fogalmával. Logaritmikus egyenlőtlenségek megoldását az értelmezési tartomány vizsgálatának szükségessége is nehezíti. Mindezek ellenére, mivel ezek a megoldási lépések jól algoritmizálhatók, az is sikeresen oldhat meg ilyen típusú feladatokat, aki nem látja át egészében, mit miért tesz. A tanár dolga, hogy a homályban maradó részleteket is megvilágítsa.

Középszinten az első- és másodfokú egyenlőtlenségek, illetve egyszerű abszolútértékes egyenlőtlenségek megoldása a követelmény; a trigonometrikus, exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségek közül azonban csak a legegyszerűbbek megoldása elvárás.

Egyenletre, egyenlőtlenségre, egyenletrendszerre vezető feladatok a matematika különböző témaköreiben előkerülnek: pl. geometriai, trigonometriai számításokban, sorozatokkal kapcsolatos feladatokban, a koordinátageometriában, függvények, kifejezések értelmezési tartományának felírása során. Ezekre könyvünkben is több példát mutatunk.

8. FEJEZET

Számelméleti ismeretek

Középiskolában a számelmélet témakörében az oszthatósággal kapcsolatos ismereteket és a számrendszereket tanítjuk. Az oszthatósági szabályok ismerete, alkalmazása, a prímszám és az összetett szám fogalmának ismerete, a számelmélet alaptételének alkalmazása (prímtényezős felbontás) már általános iskolában (7. évfolyamon) is elvárás, a középiskola 9. évfolyamára a tanulók többsége tisztában van ezekkel a fogalmakkal, eljárásokkal.

8.1. Oszthatóság

Az oszthatóság témakör elején fontos hangsúlyozni, hogy az oszthatóság fogalmát középiskolában is a természetes számok körében értelmezzük, a definíciók, tételek megfogalmazásánál ezt vesszük alapul.

Az oszthatóság fogalmát a következő módon definiáljuk:

Definíció
Az a természetes szám *osztója* a b természetes számnak, ha létezik olyan c természetes szám, amelyre igaz, hogy $ac = b$.
Ugyanazt fejezik ki a következő elnevezések: *a osztója b-nek*, *b többszöröse a-nak*, *b osztható a-val.*

Megjegyzés
Az oszthatóságot tehát nem az osztás műveletével értelmezzük. A definíció alapján bármely természetes szám osztója a 0-nak, így a 0 is. A fenti terminológiát használva tehát 0 osztható 0-val, de ez nem jelenti a 0-val való osztás műveletét, hiszen ezt nem értelmezzük (ellentmondásra vezetne). A 0 azonban nem osztója más természetes számnak.

A definíció következményeként lehet bevezetni az *oszthatósági tulajdonságokat.*

Tétel

$a|a$

$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$

$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b+c$

$a|b+c \wedge a|b \Rightarrow a|c$

$a|b \Rightarrow a|bc$

$a|1 \Rightarrow a=1$

$a|b \wedge b|a \Rightarrow a=b$

Természetesen ezek bizonyítása az algebrai kifejezésekkel végzett műveletek biztos tudásán alapul, ezért 9. évfolyamon inkább konkrét példák segítségével célszerű a jelek mögött meghúzódó tartalmakat elmagyarázni, az egzakt bizonyítás tagozaton, vagy magasabb évfolyamokon ismétléskor lehet elvárható.

Az oszthatósági feladatokban szükség van az oszthatósági szabályok ismeretére is. Ezeket optimális esetben a tanulók hozzák az általános iskolából, de 9. évfolyamon érdemes csoportosítva tárgyalni 2-vel, 5-tel, 10-zel oszthatóságot, a 4-gyel, 25-tel, 100-zal oszthatóságot, a 3-ra és a 9-re vonatkozó szabályokat, és a miértre is kitérni.

A prímszám, összetett szám fogalmával is általános iskolában ismerkednek meg a gyerekek, középiskolában a fogalmak meghatározása is elvárás.

Definíció

Prímszámok azok a természetes számok, amelyeknek pontosan két osztójuk van.

Definíció

Összetett számok azok a pozitív egész számok, amelyeknek kettőnél több osztójuk van.

Megjegyzés

Nem helyes a prímszámoknak az a – tanulóktól sokszor hallott – meghatározása, hogy azok a számok, amelyek csak 1-gyel és önmagukkal oszthatók, hiszen így az 1-et is prímszámnak kellene tekintenünk.

Az oszthatósági szabályok segítenek a számok prímtényezős felbontásában, melynek ismert eljárása a számelmélet alaptételére épül.

A számelmélet alaptétele
Bármely összetett szám felírható prímszámok szorzataként, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

A prímtényezős felbontást használjuk két vagy több szám legkisebb közös többszörösének és a legnagyobb közös osztójának kiszámítására. Még középiskolában is gyakran előforduló hiba a legkisebb közös többszörös és a legnagyobb közös osztó fogalmának és meghatározásának összekeverése. A legnagyobb közös osztó kiszámításánál a prímtényezős felbontásban szereplő közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk. A legkisebb közös többszörös előállításánál minden előforduló prímet összeszorzunk az előforduló legnagyobb hatványon. Az ezeket számon kérő feladatok megoldása során az „osztó" és a „többszörös" szavak hangsúlyozása célszerű.

Példa
Számítsuk ki az 5040 és a 7800 legkisebb közös többszörösét és legnagyobb közös osztóját!

Megoldás
$(5040;7800) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \quad [5040;7800] = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 = 327600$.
Két szám esetén ellenőrizhetjük az eredményünket, felhasználva a következő tételt: $(a;b) \cdot [a;b] = a \cdot b$.

Az alábbi oszthatósági feladatok olyan példák, amelyek megoldása nem kíván az alapórán elsajátíthatónál több ismeretet, de közös megbeszélésük, a megoldásukhoz használt módszerek bemutatása rávilágít bizonyos összefüggésekre, ezáltal az eddig tanultak mélyebb megértését segíti.

Példa
Milyen számjegyek írhatók x és y helyére, ha
a) $45 \mid \overline{135x2y}$ b) $24 \mid \overline{75x24y}$?

Megjegyzés
A tanult oszthatósági szabályok segítségével újakat alkothatunk. (Gondoljunk a 6-tal való oszthatóságra!) Felhasználjuk a következő tételt: ha $a \mid c \wedge b \mid c \wedge (a;b) = 1 \Rightarrow a \cdot b \mid c$. Lényeges, hogy a talált a és b számok relatív prímek legyenek (pl. nem igaz, hogy 24-gyel pontosan azok a számok oszthatók, amelyek oszthatók 4-gyel és 6-tal).

Példák

(1) Egy vállalkozás terek burkolását végzi, 1m x 1m méretű betonlapokkal. Milyen méretű téglalap alakú területet burkolhatnak le, ha pontosan 144 darab betonlapot használnak fel?

(2) Határozzuk meg az 5183 prímtényezős felbontását!

Megjegyzés

Alsóbb évfolyamokon többször előforduló feladat egy szám összes osztójának felsorolása. Az ilyen típusú feladatok a számolási és a kombinatorikus készséget is fejlesztik. Az (1) példa egy kevésbé direkt megfogalmazása ennek a feladattípusnak. A szöveges feladatként való megadás miatt a tanulóknak valamivel nehezebb felismerni a számelméleti tartalmat, a megoldáshoz itt is az osztókat kell megadni, osztópárokba rendezve.Az osztópárok felsorolásánál arra törekszünk, hogy egyetlen pár se maradjon ki, ezért érdemes a párok első tényezőjét növelni, így a második tényező értéke csökken.
(Pl. 144 = $1\cdot 144 = 2\cdot 72 = 3\cdot 48 = 4\cdot 36 = 6\cdot 24 = 8\cdot 18 = 9\cdot 16 = 12\cdot 12$.)
Az eljárás segítséget nyújt a (2) feladat megoldásához is, mert rávilágít, hogy a prímtényezős felbontásnál növekvő sorrendben meg kell vizsgálni minden prímet, de csak az adott szám négyzetgyökéig. Ha eddig nem találtunk prímosztót, akkor az eredeti szám prím.

A következő példában nincs szükség az osztók felsorolására, csupán az osztók számára. A megoldásához szükséges tétel megértéséhez érdemes végiggondolni a következőket. Ha egy szám prímtényezős felbontásában szereplő prímszámok közül néhányat kiválasztunk és összeszorzunk, akkor a szám osztóját kapjuk. Az összes lehetséges módon elvégezve a kiválasztást, megkapjuk az összes osztót. Ez alapján egyszerű kombinatorikai lépésekkel kapjuk az osztók számára vonatkozó tételt:

Tétel

Egy pozitív egész szám *osztóinak számát* megkapjuk, ha a prímtényezős felbontásában szereplő hatványkitevőket eggyel megnöveljük és összeszorozzuk.

Példa

Hány osztója van a 200-nak?

Megoldás

$200 = 2^3 \cdot 5^2$, osztói $2^x \cdot 5^y$ alakúak, ahol $x \in \{0; 1; 2; 3\}$ $y \in \{0; 1; 2\}$, tehát a 200-nak $(3+1) \cdot (2+1) = 12$ osztója van.

Példa

Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor $n^3 - n$ osztható 6-tal!

Megoldás

Többféle megoldási módszer közül választhatunk.

(1) Sorban megvizsgálva az n szám 6-tal való különböző osztási maradékai esetén milyen maradékot ad az $n^3 - n$ kifejezés. A $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$ … $6k + 5$ alakú számokkal számolva az oszthatósági tulajdonságok alkalmazása mellett az algebrai kifejezésekkel végzett műveletek és a nevezetes azonosságok gyakorlására is mód van. Rövidebb a megoldás, ha előbb belátjuk, hogy egy szám hatványai helyett elegendő a maradékok hatványaival számolni: $(6k+m)^3 = 216k^3 + 108k^2m + 18km^2 + m^3$ ugyanazt a maradékot adja 6-tal osztva, mint m^3.

(2) A kifejezést szorzattá alakítjuk: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$, ez három egymást követő egész szám. Közöttük biztosan van egy 2-vel és egy 3-mal osztható szám, tehát szorzatuk osztható 6-tal.

(3) Teljes indukcióval. A teljes indukciós bizonyítási módszert magasabb évfolyamon tanítjuk, önálló alkalmazását nem várjuk el átlagos képességű csoportokban, a középszintű érettségi követelményei között nem szerepel.

Példa

Határozzuk meg azokat az n egész számokat, amelyekre a $\dfrac{2n+10}{n+1}$ egész szám!

Megjegyzés

A megoldás kulcsa a tört átalakítása, az egész rész leválasztása.

$\dfrac{2n+10}{n+1} = \dfrac{2(n+1)+8}{n+1} = 2 + \dfrac{8}{n+1}$, ami pontosan akkor egész, ha n+1 osztója a 8-nak. Az n+1 lehetséges értékei: 1; 2; 4; 8 és -1; -2; -4; -8 (mivel n egész!), ebből n meghatározható. A módszer a törtfüggvények függvénytranszformációkkal való ábrázolásánál is jó szolgálatot tesz.

(Lásd *Függvények* fejezet.) A feladat diofantoszi egyenletre is visszavezethető:

$\frac{2n+10}{n+1}=k, \quad k \in Z \Rightarrow 2n+10=kn+k$ egyenlet egész megoldásait keressük.

Példa

Egy háromjegyű számból vonjuk ki a számjegyeinek fordított sorrendjében felírt számot. Igaz-e, hogy az így kapott eredmény mindig osztható lesz 9-cel?

Megjegyzés

A feladat a 9-re vonatkozó oszthatósági szabály alaposabb átgondolásával is megoldható. (Bármely szám ugyanazt a maradékot adja 9-cel osztva, mint a számjegyeinek összege.) A másik megoldási módszer az ehhez hasonló feladatok megoldására a számok helyiértékes alakjának felírása: $\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-(100c+10b+a)$, a kapott betűs kifejezésekkel a műveletek elvégzése, majd a tanult oszthatósági tulajdonságok alkalmazása. A helyiértékes alak használata miatt a számrendszerek tanítása során is vissza lehet térni a feladatra.

8.2. Számrendszerek

A számrendszerek tanítását lehet a számírás történetével foglalkozó áttekintéssel bevezetni, akár tanulói kiselőadás formájában is. Mutathatunk a tanulóknak példákat a tízestől különböző számrendszerek hétköznapi használatára is (pl. 60-as számrendszer az időmérésben: óra, perc, másodperc; szögmérésben: fok, szögperc, szögmásodperc). Beszélhetünk a 2-es számrendszernek a számítástechnika történetében betöltött szerepéről.

A helyiértékes írásmód lényege, hogy a számjegyek értéke mellett annak helye is értékkel bír: a alapú számrendszerben egy egész szám helyiértékei (jobbról balra):

$a^0=1$, a^1, a^2, a^3, … Emiatt a legnagyobb számjegy a-1.

Az **áttérés más számrendszerből 10-es számrendszerbe** a helyiértékek figyelembe vételével történik.

Példa

$3402_5 = 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 375 + 100 + 2 = 477$

A **tízes alapú számrendszerből másik számrendszerre való áttérés** megértését segítheti a következő feladat.

Példa

Egy biogazdaság tojásokat szállít egy áruházláncnak. A tojások biztonságos szállítása érdekében a következő módon csomagolják be termékeiket: 6 tojást egy fehér tojástartóba tesznek, 6 ilyen tojástartót egy sárga dobozba helyeznek, 6 sárga dobozt egy nagyobb piros dobozba csomagolnak, és hat piros dobozt egy zöld ládába raknak bele. Egyik nap pontosan 2045 tojás várt az elszállításra. A fenti módon elvégezve a csomagolást, hányat láthatunk a tojásokat tartalmazó különböző színű dobozokból, és hány tojás maradt ki?

Megoldás

1 zöld, 3 piros, 2 sárga, 4 fehér dobozt és 5 kimaradt tojást láthatunk. A megoldás a szám 6-os számrendszerbeli alakjából leolvasható. $2045 = 13245_6$, mert:

$2045 : 6 = 340$	$340 : 6 = 56$	$56 : 6 = 9$	$9 : 6 = 1$	$1 : 6 = 0$
5	4	2	3	1

A számelmélet, mint önálló fejezet csak 9. évfolyamon jelenik meg a középiskolában, de az itt megtanult módszerek használatára több témakör is alkalmat ad, amint ezt a fenti példákban már láthattuk. A számelmélet változatos lehetőségeket nyújt matematikatörténeti és számelméleti érdekességek, aktuális problémák, alkalmazások bemutatására, amelyek egyszerű fogalmakra épülnek, könnyen érthetők, ezáltal felkelthetik diákjaink érdeklődését, ezért ezekre mindenképp érdemes időt szakítani.

9. FEJEZET

Függvények

A függvényekkel, az analízis elemeivel már az általános iskolában sokat foglalkoznak a diákok. Szabály-játékokat elemeznek, összefüggéseket állapítanak meg, halmazok elemeit rendelik egymáshoz, egyszerű sorozatokat ismernek meg. Később kialakítják a függvény fogalmát is, ábrázolnak és elemeznek elsőfokú függvényeket, de látnak példákat a másodfokú és az abszolútérték-függvényre is. Speciális sorozatokat vizsgálnak, példákat mutatnak a számtani sorozatra, megtanulják összeadni annak elemeit.

Bőven van tehát mire támaszkodnunk a középiskolában, amikor a 9. évfolyamon hozzáfogunk e témakör tárgyalásához. Ugyanakkor nyilvánvalóan ekkor is a függvény fogalmának tisztázásával kell kezdenünk a munkát. Célszerű például felrajzolni egyszerű halmaz-hozzárendeléseket, hogy világossá tegyük az *egyértelmű* és a *kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés,* az *értelmezési tartomány* és az *értékkészlet* fogalmát. Különösen fontos, hogy diákjaink meg tudják különböztetni ez utóbbit a *képhalmaz*tól, hiszen általában nem figyelnek arra, hogy az

$f: A \to B$ hozzárendelés esetén $D_f = A$, de a B a képhalmaz, és az R_f értékkészlet ennek csupán egy (nem feltétlenül valódi) részhalmaza.

Definíció

Az $f: A \to B$ hozzárendelést <u>*függvénynek*</u> nevezzük, ha f az A halmaz minden eleméhez a B pontosan egy elemét rendeli.

A kezdeti, nyilvánvalóan egyszerűbb, a D_f és az R_f meghatározását szolgáló feladatok után, az alapfüggvények megismerése közben folyamatosan oldhatunk meg hasonló jellegű példákat.

Példa

Határozzuk meg az $f: R \to R$, $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megjegyzés

Ezt a feladatot nyilvánvalóan a trigonometrikus függvények és egyenlőtlenségek tárgyalása után, legkorábban a 11. évfolyamon célszerű kitűzni. Az értelmezési tartomány megadásához meg kell oldanunk a $\sin x \geq \frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget. Ennek megoldáshalmaza a $D_f = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,\middle|\, k \in Z \right\}$ halmaz. Az értékkészlet – például a $g(x) = 2\sin x - 1$ függvény tulajdonságainak vizsgálata alapján – az $R_f = [0;1]$ intervallum.

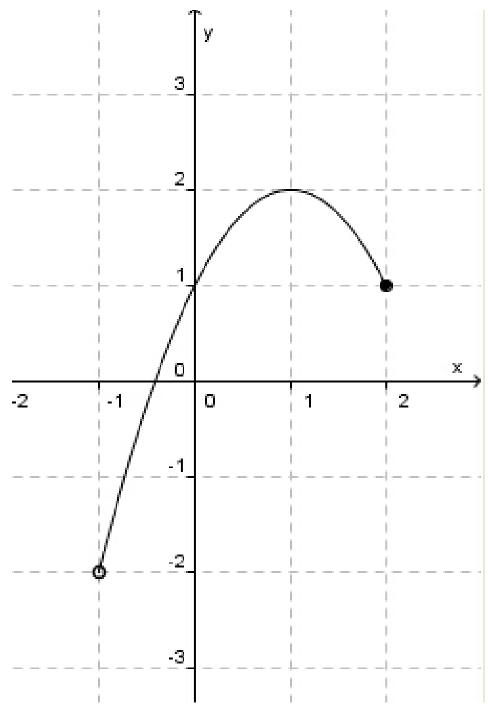
Olyan függvények vizsgálatát is érdemes beiktatni, amelyek valamely ismert függvény leszűkítései.

Példa

Határozzuk meg az $f :]-1;\, 2\,] \to R,\ f(x) = -x^2 + 2x + 1$ függvény értékkészletét!

Megjegyzés

Mindenekelőtt a szokásos módon teljes négyzetté alakítjuk a másodfokú kifejezést. Az $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ alakból kiderül, hogy egy $T(1;2)$ tengelypontú, fordított állású paraboláról van szó (*1.ábra*), és miután $f(-1) = -2$ volna, továbbá $f(2) = 1$, ezért az értékkészlet $R_f =]-2;2]$.



1. ábra

Visszatérve a függvényfogalom bevezetéséhez, a definíció tisztázása után definiáljuk az alapfüggvények egy részét úgy, hogy közben a legfontosabb függvényjellemzőket is bevezetjük. Érdemes mindezt matematikailag korrekt módon, a későbbi tanulmányokat is figyelembe véve végezni.

Definíció

Legyen $m, b \in R$ Az $f : R \to R,\ f(x) = mx + b$ függvényt <u>*lineáris függvénynek*</u> nevezzük.

Bár a 9. évfolyamos tankönyvek egy részében az *m* együttható helyett *a* szerepel, mégis célszerűbb az *m* jelöléssel megkönnyíteni a meredekség fogalmának későbbi elmélyítését. Azt is tisztáznunk kell, hogy

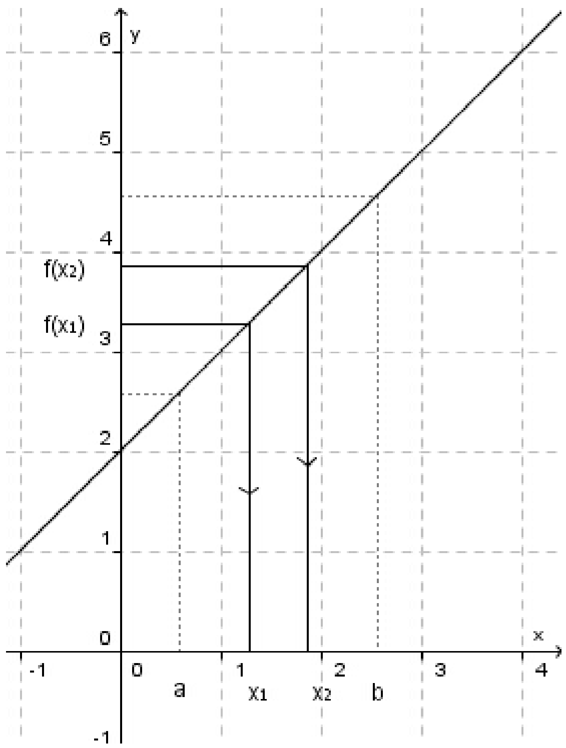
- ha $m = 0$, akkor *konstans* függvényről,
- ha $m \neq 0$, akkor *elsőfokú* függvényről,
- ha $m \neq 0$ és $b = 0$, akkor *egyenes arányosság* függvényéről beszélünk.

Miután tisztázzuk, hogy e függvények képe egyenes, ami a $(0;b)$ pontban metszi az y tengelyt, definiálnunk kell a monotonitási kategóriákat. A definíciókban érdemes az I intervallumjelölést választanunk, jelezve ezzel, hogy nyitott, zárt, illetve félig nyílt, félig zárt intervallumokra egyaránt érvényesek megállapításaink.

Definíció

Az f függvény az $I \subseteq D_f$ intervallumon <u>*szigorúan monoton növekvő*</u>, ha $\forall\ x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ teljesül.

A monotonitás fogalmainak kialakítása jó, ha a diákokkal közösen, szemléltetve történik, hiszen így rögzül igazán ez a tulajdonságcsoport (*2. ábra)*.



2. ábra

Fel kell hívnunk a figyelmet a meredekség szerepére a lineáris függvény monotonitásának megállapításában:

- ha $m = 0$, akkor konstans, de monoton növekvő és monoton csökkenő is egyben,
- ha $m < 0$, akkor pedig szigorúan monoton csökkenő a lineáris függvény.

Definíció
Az f függvény *zérushelye* az $x_0 \in D_f$, ha $f(x_0) = 0$.

Tudatosítanunk kell diákjainkban, hogy a zérushely megkeresése általában egy egyenlet megoldását jelenti. A lineáris függvények esetén ez az egyenlet legfeljebb elsőfokú.

A szélsőérték fogalmát is ekkor célszerű kialakítani, jóllehet csak a később tárgyalandó alapfüggvényeknél játszik majd nagyobb szerepet. Jó ugyanis, ha a kezdet kezdetén hozzászokik a tanuló, hogy öt alapvető függvényjellemzési szempontot kell vizsgálnia minden egyes függvény esetén (D_f, R_f, menet, zérushely, szélsőérték).

Definíció
Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen *(abszolút) maximuma* van, ha $\forall\ x \in D_f$ esetén $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül.

Definíció
Az f függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen *(abszolút) minimuma* van, ha $\forall\ x \in D_f$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül.

A függvénytulajdonságok definiálása után néhány példán érdemes elmélyíteni a fogalmakat. A jellemzés a konstansfüggvények esetében megy általában nehezebben.

Példa
Jellemezze az $f: R \to R,\ f(x) = 3$ függvényt!

Megjegyzés
A $D_f = R,\ R_f = \{3\}$ megállapítása általában nem okoz nehézséget, csakúgy, mint annak felismerése, hogy a függvénynek nincs zérushelye. A menet leírása esetén érdemes felhívnunk a figyelmet arra, hogy ebben az esetben mind a *konstans*, mind pedig a *monoton növekvő/csökkenő* teljesül. Sok tanulónak az is gondot okoz, hogy a függvény minimum- és

maximumhelyeinek halmaza is a teljes *R,* a felvett minimum/maximum érték pedig $y = 3$.

A következő, szintén a 9. évfolyamon tárgyalt alapfüggvényünk a másodfokú függvény.

Definíció

Legyen $a, b, c \in R$, $a \neq 0$. Az $f : R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényt *másodfokú függvénynek* nevezzük.

Ez a függvénytípus – amelynek a képe az y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola – alkalmat ad arra, hogy a szélsőérték fogalmát elmélyítsük, továbbá, hogy fokozatosan becsempésszük a függvény-transzformációkra vonatkozó ismereteket példáinkba. Célszerű olyankor tárgyalni, amikor algebrából már túl vagyunk a teljes négyzetté alakítás műveletén, így az egyszerűbb, egy-, illetve kétlépéses transzformációk után ezt az algoritmust is gyakoroltathatjuk.

Példa

Ábrázolja és jellemezze az $f : R \to R$, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ függvényt!

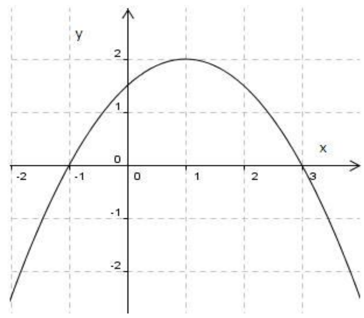
Megjegyzés

A teljes négyzetté alakítást a másodfokú tag negatív előjele és törtegyütthatója esetén különösen nehezen tudják elvégezni a diákok.

Az

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x - 3\right) = -\frac{1}{2}\left[(x-1)^2 - 1 - 3\right] = -\frac{1}{2}\left[(x-1)^2 - 4\right] = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$$

átalakítás-sorozat után felismertetjük, hogy a fordított állású parabola tengelypontja a $T(1;2)$ pont, így jól ábrázolható és jellemezhető a függvényünk (*3. ábra)*.



3. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R$
- $R_f = \left]-\infty; 2\right]$
- menet: szig. mon. növekvő, ha $x \leq 1$
  szig. mon. csökkenő, ha $x \geq 1$
- max.helye: $x = 1$
  értéke: $y = 2$
- zérushelye: x = -1; 3. Ha az esetlegesen pontatlan ábrázolás miatt nem olvashatjuk le pontosan a zérushelyeket, a $-\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2 = 0$ egyenletet a megoldóképlet nélkül is meg tudjuk oldani – ez is a teljes négyzetté alakítás előnye.

Ha a másodfokú függvényeket már elég jól begyakoroltattuk, érdemes összefoglalni a függvény-transzformációkat.

Változó-transzformációk:

- $f(x+c)$: eltolás az x tengely mentén, - c egységgel;
- $f(c \cdot x)$: $\frac{1}{c}$ – szeres nyújtás az x tengely mentén ($c > 0$);
- $f(-x)$: tükrözés az y tengelyre.

Érték-transzformációk:

- $f(x) + c$: eltolás az y tengely mentén, c egységgel;
- $c \cdot f(x)$: c – szeres nyújtás az y tengely mentén ($c > 0$);
- $-f(x)$:tükrözés az x tengelyre.

Ezt megtehetnénk a 9. évfolyamos függvénytani témakör végén is, de ha itt tesszük, az ezek után következő függvénytípusok ábrázolása során jó szolgálatot tehet ismeretük.

Az abszolút érték fogalmának felelevenítése után foglalkozhatunk az *abszolútérték-függvénnyel* és transzformációival. Kezdeti példáink felölelhetik az $f(x) = a|x-u| + v$ típusú függvények ábrázolását és jellemzését – ezekkel nem lesz túlságosan nehéz dolgunk, ha a másodfokú függvényt sikerült jól elsajátíttatnunk, hiszen a megfelelő függvények mérhető jellemzői többnyire azonosak.

Általában nehezebben megy az olyan függvények értelmezése, amik két abszolút értékes kifejezés összegeként vagy különbségeként adódnak.

Példa

Ábrázolja és jellemezze az $f(x)=|2x-4|+|2x+2|,\ x\in R$ függvényt!

Megjegyzés

Mindenekelőtt érdemes az abszolút érték definíciója alapján mindkét kifejezést lineáris kifejezésekre bontani.

$$f_1(x)=|2x-4|=\begin{cases}2x-4, & ha\ 2x-4\geq 0,\ azaz\ x\geq 2\\ 4-2x, & ha\ 2x-4<0,\ azaz\ x<2\end{cases}$$

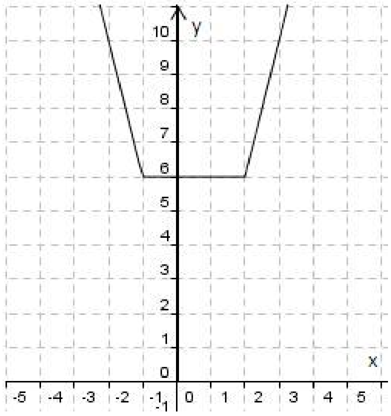
$$f_2(x)=|2x+2|=\begin{cases}2x+2, & ha\ 2x+2\geq 0,\ azaz\ x\geq -1\\ -2x-2, & ha\ 2x+2<0,\ azaz\ x<-1\end{cases}$$

A diákok egy része figyelmetlen, így számítanunk kell arra, hogy a töréspontokat hibásan határozzák meg (például x = 4-ként és x = -2-ként), emiatt érdemes ilyen részletesen felírni és elmagyarázni a szétbontást. Ezután készítsünk egy táblázatot (*1. táblázat*)!

	$x<-1$	$-1\leq x<2$	$x\geq 2$
$f_1(x)$	4 – 2x	4 – 2x	2x – 4
$f_2(x)$	– 2x – 2	2x + 2	2x + 2
$f(x)$	– 4x + 2	6	4x – 2

1. táblázat

A táblázat alapján már könnyen ábrázolhatjuk, majd jellemezhetjük a függvényt (*4. ábra)*.



4. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R$
- $R_f = [6; +\infty[$
- menete: szig.monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty; -1]$
  konstans, ha $x \in [-1; 2]$
  szig.monoton növekvő, ha $x \in [2; +\infty[$
- min.helye: $x \in [-1; 2]$
  min.értéke: $f(x) = 6$
- zérushelye nincs

A függvény menetének leírása többféle felbontásban történhet; hasznos lehet, ha megbeszéljük a diákokkal a változatokat (például: monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty; 0]$ és monoton növekvő, ha $x \in [0; +\infty[$).

Az egymásba ágyazott abszolútérték-jeleket tartalmazó függvények ábrázolása során támaszkodhatunk a transzformációs lépésekről megszerzett ismeretekre. Ha van rá lehetőségünk, az ilyen, összetettebb feladatok megoldását számítógép-termes órán, vagy táskagépek segítségével végezzük, például a GeoGebra szoftverrel, hiszen így az egyes lépések gyorsabban elvégezhetők, könnyebben nyomon követhetők.

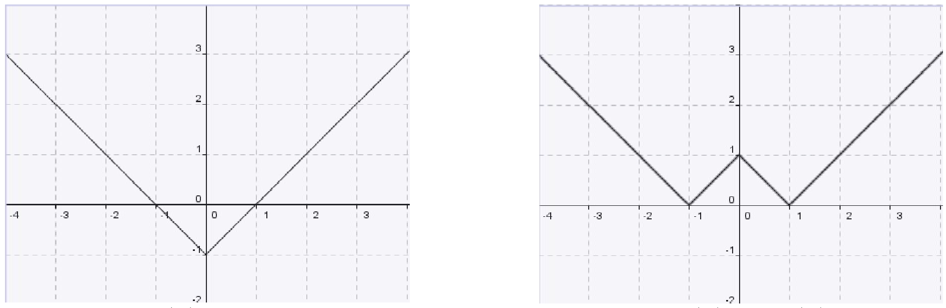
Példa

Ábrázoljuk függvény-transzformációkkal az

$f: R \to R,\ f(x) = \left|\left|\left|x\right| - 1\right| - 2\right| - 1$ függvényt!

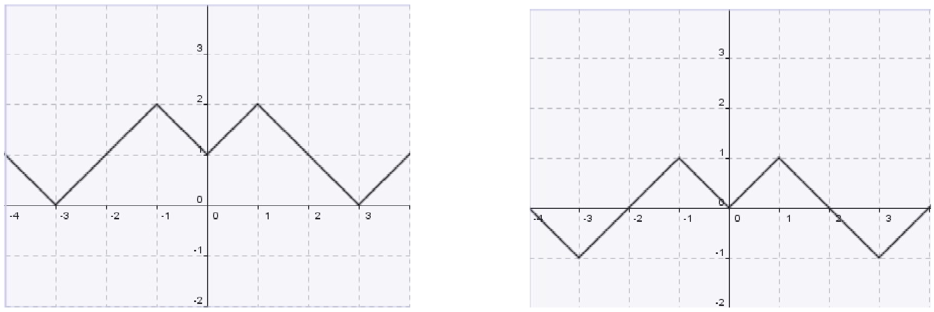
Megjegyzés

Az egyes lépések ábrázolását érdemes különböző színnel, vonalvastagsággal végezni, illetve kiemelni a legutolsó lépéssel adódott képet (*5. ábra*). Minden lépés során jó, ha tudatosítjuk az adott transzformáció hatását. A füzetbe ilyenkor legfeljebb az utolsó lépést érdemes rögzíteni, és a jellemzést is inkább szóban végezzük, legfeljebb otthon rögzíttessük.



$f_1(x) = |x| - 1$ $\qquad$ $f_2(x) = |f_1(x)|$

$f_3(x) = |f_2(x) - 2|$ $\qquad$ $f(x) = f_3(x) - 1$



5. ábra

A *lineáris törtfüggvények* tárgyalása kapcsán mindenekelőtt érdemes feleleveníteni a fordított arányosság általános iskolában már tanult fogalmát. Ezután az alapfüggvény, az $f : R \to R,\ f(x) = \frac{1}{x},\ (x \neq 0)$ ábrázolását és jellemzését végezzük el, kitérve arra, hogy ennek a képe hiperbola, amelynek aszimptotái az x és az y tengely. (Ezeket az aszimptotákat egyébként a transzformált függvények esetén is mindig érdemes, legalább szaggatott vonallal berajzoltatni.)

A függvény jellemzése során fontos felhívnunk a figyelmet arra, hogy a menet leírását a görbe két ágára külön-külön kell végeznünk. Nem teljesül ugyanis, hogy ez a függvény a teljes értelmezési tartományon szigorúan monoton csökkenő volna, de az $\left]-\infty;0\right[$, illetve a $\left]0;+\infty\right[$ résztartományokon igen.

A szokásos egy-két lépéses transzformációk bemutatásán, begyakorlásán túl itt is gyakorolnunk érdemes olyan átalakítást, amit korábban, a számelmélet tárgyalása során megismerhettünk.

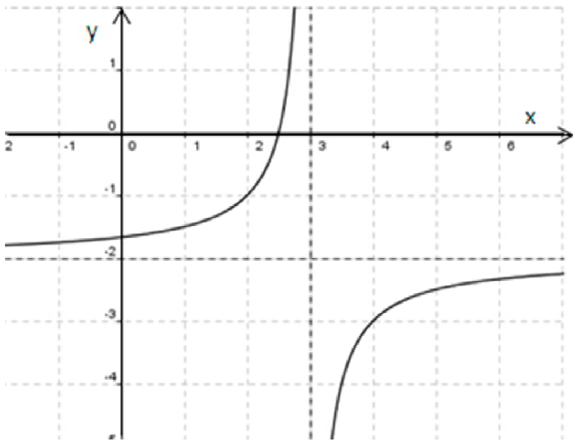
Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x)=\dfrac{5-2x}{x-3}$, $(x\in R, x\neq 3)$ függvényt!

Megjegyzés

Mindenekelőtt a számelmélet-fejezetben megismert módon leválasztjuk a számláló „egész-részét”, majd a transzformációs lépéseket felismertetve elvégezzük az ábrázolást (*6.ábra)*. Mindenképpen érdemes itt is berajzoltatni a x = 3 és az y = -2 aszimptotákat.

$$f(x)=\frac{5-2x}{x-3}=\frac{-2(x-3)-1}{x-3}=\frac{-2(x-3)}{x-3}-\frac{1}{x-3}=-2-\frac{1}{x-3}$$



6. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R\setminus\{3\}$

- $R_f = R \setminus \{-2\}$
- menete: szig.monoton növekvő, ha $x < 3$
  szig.monoton növekvő, ha $x > 3$
- szélsőértéke nincs
- zérushelye: $x = \frac{5}{2}$

Ismertessük fel, hogy a zérushely számítással történő meghatározásához a legelső, átalakítás nélküli alakból érdemes kiindulni!

A <u>*hatványfüggvények*</u> ábrázolása felé is a 9. évfolyamon teszünk kitekintést. Célszerű ekkor, néhány alap-hatványfüggvény megismerése kapcsán definiálni a paritás alapfogalmait, bemutatva, hogy a páros kitevőjű alap-hatványfüggvények *páros*, míg a páratlan kitevőjűek *páratlan* függvények; az elnevezésük is innen adódik.

Definíció
Az f függvény <u>*páros*</u>, ha bármely $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$.

Megjegyzés
Páros függvény grafikonja az y tengelyre szimmetrikus.

Definíció
Az f függvény <u>*páratlan*</u>, ha bármely $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.

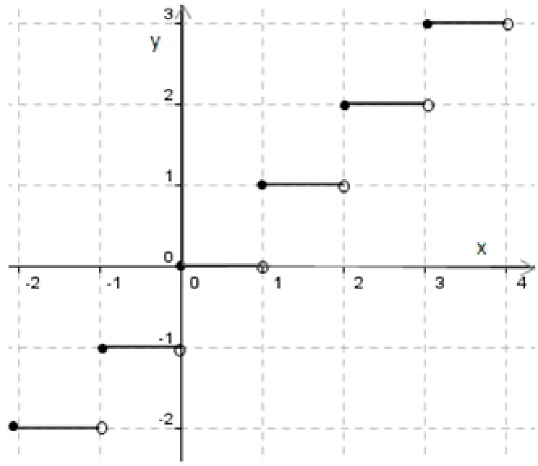
Megjegyzés
Páratlan függvény grafikonja az origóra középpontosan szimmetrikus.

Néhány speciális függvényt kiegészítő anyagként szokás tárgyalni a 9. évfolyamos függvénytani fejezet végén. Azért érdemes erre időt szakítani, mert az egészrész-függvény ábrázolásakor láthatnak a diákok egy tipikus lépcsős függvényt, a törtrész függvény megadásakor alkalmunk nyílik a korlátosság és a periodicitás tulajdonságának kifejtésére, az előjelfüggvény esetében pedig előre tekinthetünk az összetett függvények felé.

Definíció
Az x valós szám <u>*egészrészén*</u> az illető számnál nem nagyobb, legnagyobb egész számot értjük. Jele: $[x]$.

Definíció
Az $f: R \to R,\ f(x) = [x]$ függvényt *<u>egészrész-függvénynek</u>* nevezzük.

Megjegyzés
A GeoGebra programban a floor(x) függvény adja meg az egészrész-függvényt, az intervallum-végek helyes jelölése nélkül, amit, például interaktív táblán, ki tudunk egészíteni (*7.ábra)*.



7. ábra

Jellemzése:
- $D_f = R,\ \ R_f = Z$
- menet: monoton növekvő
- szélsőérték: nincs
- zérushely: $[0;1[$

Definíció
Az f valós értékű függvény *<u>alulról korlátos</u>*, ha $\exists\ k \in R,$ hogy $\forall\ x \in D_f$ esetén $f(x) \ge k.$

Definíció
Az f valós értékű függvény *<u>felülről korlátos</u>*, ha $\exists\ K \in R,$ hogy $\forall\ x \in D_f$ esetén $f(x) \le K.$

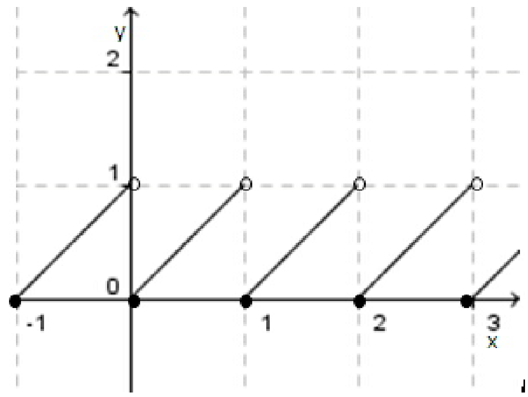
Definíció
Az f valós értékű függvény *<u>korlátos</u>*, ha alulról és felülről is korlátos.

Definíció
Az f valós értékű függvény <u>*periodikus*</u>, ha $\exists\ p > 0,\ p \in R,$ amelyre $\forall\ x \in D_f$ esetén $x + p \in D_f$ és $f(x+p) = f(x)$ is teljesül. Az f <u>*periódusa*</u> a legkisebb ilyen tulajdonságú p érték, ha ez létezik.

A fenti definíciót nem könnyű megérteni és helyesen visszaadni a 9. évfolyamon, főként a benne szereplő kvantorok miatt. Így teljes körű elmélyítése csupán a 10. évfolyam végén, a trigonometrikus függvények kapcsán történik meg. Meg kell értetnünk, hogy a „*ha ez létezik*” megfogalmazással a konstans függvényeket zárjuk ki a periodikusság tulajdonságából.

Definíció
Az x valós szám <u>*törtrészén*</u> az $\{x\} = x - [x]$ számot értjük.

Definíció
Az $f : R \to R,\ f(x) = \{x\}$ függvényt <u>*törtrész-függvénynek*</u> nevezzük (*8. ábra*).



8. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R,\ R_f = [0;1[$
- menete: $\forall\ [k;k+1[,\ k \in Z$ intervallumon szigorúan monoton növekvő
- minimumhelye: $x = k \in Z$, értéke: y = 0

- zérushelye: $x = k \in Z$
- korlátos
- periodikus, periódusa 1

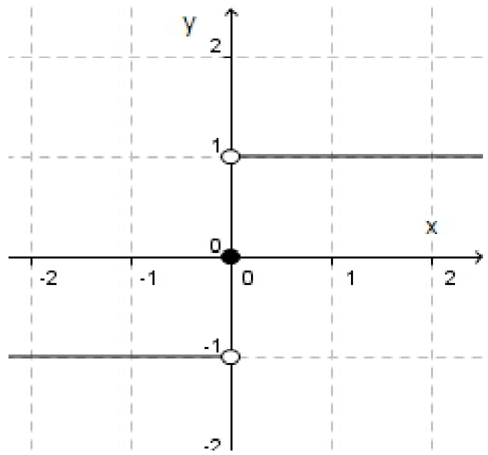
Definíció

Tetszőleges $x \in R$ esetén legyen $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & ha\ x > 0 \\ 0, & ha\ x = 0 \\ -1, & ha\ x < 0 \end{cases}$.

Ekkor az $f : R \to R,\ f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ függvényt *előjel-(szignum-) függvénynek* nevezzük.

Megjegyzés

Elvárható, hogy a definíció és az eddigi ismeretek alapján a diákok önállóan is tudják ábrázolni és jellemezni ezt a függvényt (*9. ábra)*. Ab-ból adódhat nehézség, hogy a 0 környezetében nem tudják elképzelni a viselkedését, illetve helytelenül írják le az értékkészletet, valamint a szélsőértékeket.



9. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R,\ R_f = \{-1; 0; 1\}$
- menete: monoton növekvő

- maximumhelye: $\forall\ x \in R^+$, értéke: $y = 1$
- minimumhelye: $\forall\ x \in R^-$, értéke: $y = -1$
- zérushelye: $x = 0$
- korlátos
- páratlan

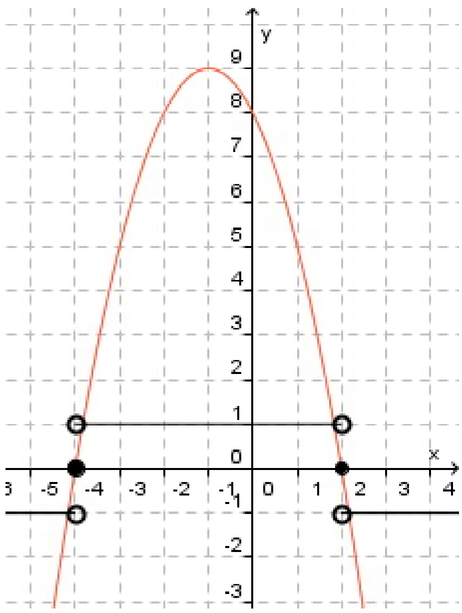
Az előjel-függvény gyakorlása lehetővé teszi számunkra a korábban már megtanult ismeretek felelevenítését, alkalmazását.

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f : R \to R,\ f(x) = \mathrm{sgn}\left(-x^2 - 2x + 8\right)$ függvényt!

Megjegyzés

Mindenekelőtt a szokásos módon teljes négyzetté alakítjuk a másodfokú kifejezést $\left(-x^2 - 2x + 8 = -(x+1)^2 + 9\right)$, majd megállapítjuk, hogy fordított állású a parabola, továbbá, hogy a zérushelyei: -4 és 2. Ezen ismeretek birtokában már könnyen ábrázolhatjuk a függvényt. Célszerű a parabolát is feltüntetni az ábrán (*10.ábra)*.



10. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R,\ R_f = \{-1;0;1\}$
- menete: konstans, ha $x \in \left]-\infty;-4\right[$;

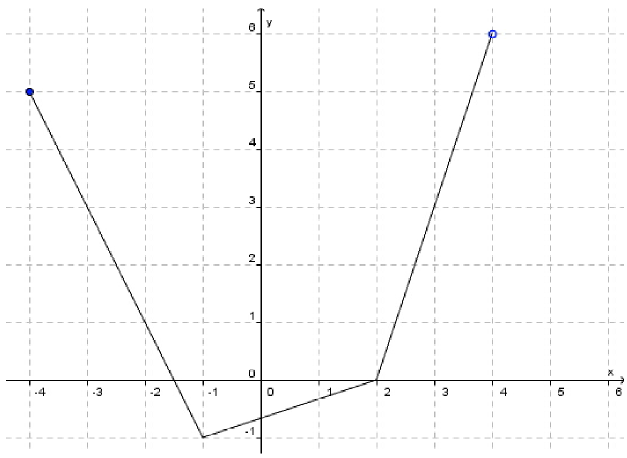
konstans, ha $x \in \left]-4;\ 2\right[$;

konstans, ha $x \in \left]2;+\infty\right[$

- maximumhelye: $x \in \left]-4;\ 2\right[$, értéke: $y = 1$
- minimumhelye: $x \in \left]-\infty;\ -4\right[\cup \left]\ 2;\ +\infty\right[$, értéke: $y = -1$
- zérushelye: x = -4; 2

A függvénytani ismereteinket szöveges és összetett feladatokkal, ábra-felismerésekkel is elmélyíthetjük.

Példa
Írjuk le képlettel, majd jellemezzük a következő függvényt (*11. ábra)*!



11. ábra

Megjegyzés
A leírás három lineáris függvénnyel történhet:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-3,\ ha\ x \in [-4;-1] \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3},\ ha\ x \in \left]-1;\ 2\right[\\ 3x-6,\ ha\ x \in [2;4[\end{cases}$$

Jellemzése:

- $D_f = [-4;4[$
- $R_f = [-1;6[$
- menete: szig.mon. csökkenő, ha $x \in [-4;-1]$
  szig.mon. növekvő, ha $x \in [-1;4[$
- minimumhelye x = -1; értéke y = -1
- maximuma nincs, de felülről korlátos, K = 6

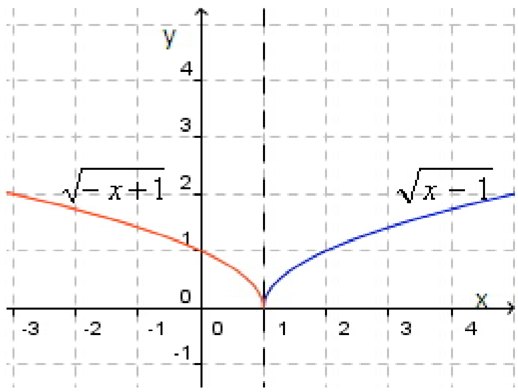
A 10. évfolyamon mindenekelőtt a négyzetgyökre vonatkozó, már az általános iskolában és a 9. évfolyamon is érintett ismereteket fejtjük ki részletesebben. Ehhez a témakörhöz szervesen hozzátartozik a négyzetgyök-függvény értelmezése, ábrázolása, transzformációi. E transzformációk közül ekkor tudjuk igazán gyakorolni az $f(-x)$ típusú változó-transzformációkat.

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x) = \sqrt{-x+1}$ függvényt!

Megjegyzés

Érdemes mindenekelőtt az $f(x) = \sqrt{-(x-1)}$ átalakítást elvégezni, hiszen így el tudjuk magyarázni, hogy transzformációkkal ábrázolva először az x tengely mentén pozitív irányba kell tolnunk 1 egységgel az alapfüggvényt, majd ezt kell tükröznünk az y tengelyt helyettesítő x = 1 egyenesre (*12.ábra)*. Ezt a gyakorlatunkat később, a trigonometrikus függvények ábrázolása során is nagyon jól tudjuk kamatoztatni.



12. ábra

Jellemzése:

- $D_f = \left]-\infty; 1\right]$, $R_f = [0; +\infty[$
- menete: szig. mon. csökkenő
- minimumhelye: x = 1, értéke: y = 0
- zérushelye: x = 1
- alulról korlátos
- nem páros, nem páratlan

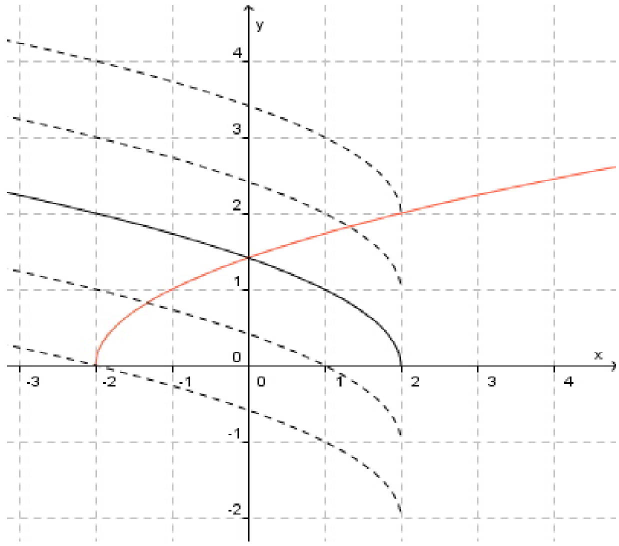
Négyzetgyökös egyenletek megoldása során is jól használhatjuk függvénytani ismereteinket.

Példa

Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + k$, $k \in Z$ egyenletet!

Megjegyzés

Mindenekelőtt meghatározzuk az alaphalmazt: $D = [-2; 2]$, majd közös koordináta-rendszerben ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt{x+2}$ és a $g(x) = \sqrt{2-x}$ függvényt *(13. ábra)*.



13. ábra

Ezek képe – láthatóan és bizonyíthatóan – szimmetrikus az y tengelyre, metszéspontjuk tehát az $x = 0$-ban van. A g függvény grafikonját függőlegesen egész értékekkel eltolva adódnak a további megoldások. Az ábra segít annak eldöntésében, hogy $k \leq -3$ és $k \geq 3$ esetén nincs megoldás. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $k = -2$ esetén az $x = -2$, $k = 2$ esetén pedig az $x = 2$ az egyenlet megoldása. A $k = -1$ eset megoldása nem olvasható le, de számolás után kiderül, hogy a megoldás az $x = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, míg $k = 1$ esetén az $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ugyanebben a témakörben kitérünk az n-edik gyökvonás értelmezésére, így a négyzetgyök-függvényt összehasonlíthatjuk a *köbgyök-függvénnyel* is. Érdemes már ilyenkor megemlíteni a hatványfüggvények és a megfelelő gyökfüggvények inverz-kapcsolatát is, kitérve a szükséges leszűkítésekre.

A 10. évfolyam következő nagy témaköre a másodfokú egyenletek fejezete (lásd *Egyenlet, egyenlőtlenség* fejezet). Ekkor természetesen újra előkerülnek a másodfokú függvények; felelevenítjük ábrázolásukat, de sokrétűen fel is használjuk őket, elsősorban egyenlőtlenségek, illetve szélsőérték-feladatok megoldása során. Lássunk ezekre is példát!

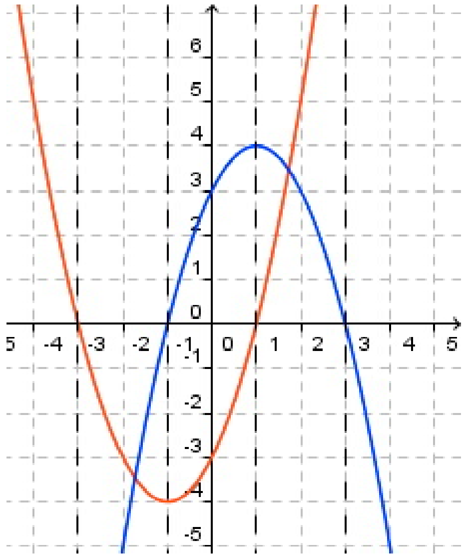
Példa

Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$\frac{x^2 + 2x - 3}{-x^2 + 2x + 3} \geq 0$ egyenlőtlenséget!

Megjegyzés

Először tisztáznunk kell, hogy a nevező miatt az alaphalmaz $D = R \setminus \{-1; 3\}$, illetve, hogy az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. Az ábrázolás akár a zérushelyek segítségével is könnyen megtörténhet *(14. ábra)*, az ábráról pedig leolvasható a megoldáshalmaz: $M = [-3; -1[\cup [1; 3[$.



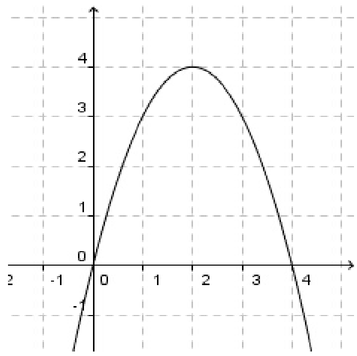
14. ábra

Példa

Határozzuk meg a 8 egység kerületű téglalapok közül azt, amelynek a területe maximális!

Megjegyzés

Ezt a jól ismert feladattípust többféle módszerrel is megoldhatjuk. Ha függvényelemzés segítségével szeretnénk ezt megtenni, akkor a következőképpen járhatunk el: jelölje a téglalap két oldalát x és y. Ekkor a kerületre a $8 = 2x + 2y$ összefüggés érvényes, míg a területre $t = xy$ adódik. Ha a kerületre vonatkozó egyenletből y-t kifejezve behelyettesítjük a terület összefüggésébe, egy x-ben másodfokú függvényhez jutunk: $t(x) = x(4 - x)$ Ennek elemzése *(15. ábra)* vezet a megoldáshoz: $x = y = 2$, a keresett síkidom tehát a 2 egység oldalú négyzet.



15. ábra

A 10. évfolyamon vezetjük be a szögfüggvényeket is. Ezek általánosítása után kell ábrázolnunk a trigonometrikus alapfüggvényeket és azok transzformációit. A két koordinátatengelyen beállított egységek felvétele úgy közelít legjobban a valósághoz, ha a négyzetrácsos lapon az y tengelyen két négyzetet választunk egységnek, az x tengelyen pedig három négyzet lesz a $\frac{\pi}{2}$ értéke. A függvények jellemzése során mindenképpen figyelnünk kell a periódusra, illetve annak változására, továbbá a változó-transzformációk elvégzésére.

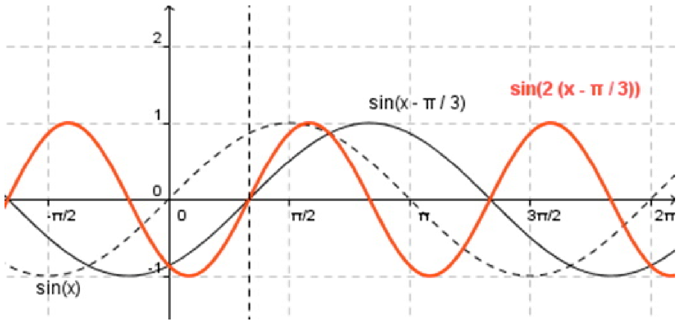
Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük a $f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$, $x \in R$ függvényt!

Megjegyzés

Az ábrázolás előtt célszerű elvégezni a következő átalakítást:

$f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Így világossá tehető, hogy a szinuszfüggvényt először az x tengely mentén pozitív irányban kell eltolnunk $\frac{\pi}{3}$ egységgel, majd a függvény $x = \frac{\pi}{3}$ *egyenesre eső pontjához képest* kell kicsinyítenünk az x tengely irányában felére. Jó, ha az egyes transzformációs lépéseknek megfelelő függvényeket is feltüntetjük ábránkon *(16. ábra)*.



16. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R$
- $R_f = [0;1]$
- menete: szig. mon. növekvő, ha $x \in \left[\frac{\pi}{12} + k\pi; \frac{7\pi}{12} + k\pi\right]$;

  szig. mon. csökkenő, ha $x \in \left[\frac{7\pi}{12} + k\pi; \frac{13\pi}{12} + k\pi\right]$;
- maximumhelye: $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$, értéke: y = 1;
- minimumhelye: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, értéke: y = -1;
- zérushelye: $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2},\ k \in Z$
- korlátos; nem páros, nem páratlan; periodikus, periódusa: π .

A zérushely megállapítása gyakran egy trigonometrikus egyenlet megoldását igényli.

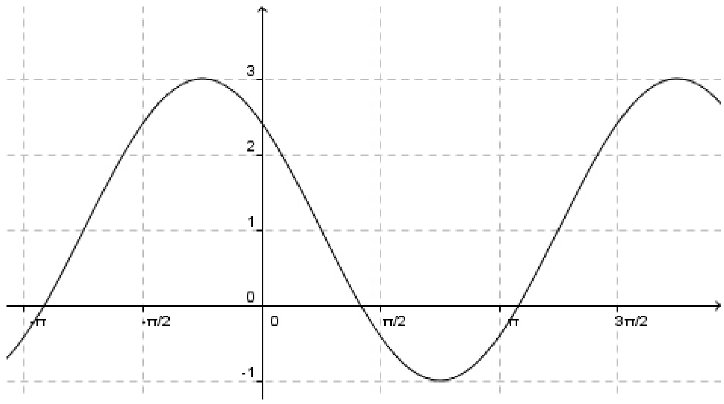
Példa

Állapítsuk meg az $f(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1,\ x \in R$ függvény zérushelyét!

Megjegyzés

A függvény ábrázolása után *(17. ábra)* kiderül, hogy az ábráról nehezen olvasható le a zérushely. Így meg kell oldanunk a $2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$ egyenletet. Ennek megoldásai az

$x_1=\frac{5\pi}{12}+2k_1\pi$ és az $x_2=\frac{13\pi}{12}+2k_2\pi,\ k_1,k_2\in Z$ gyöksorozatok.



17. ábra

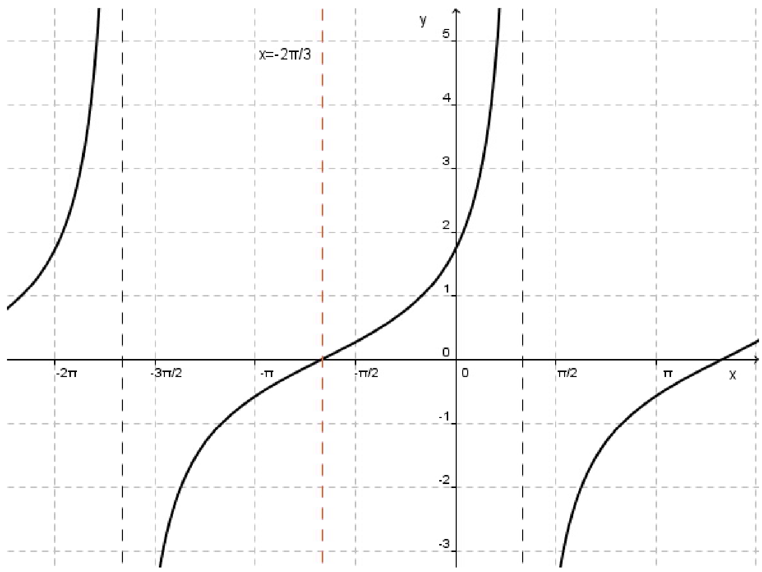
A tangens- és kotangens-függvények ábrázolása során érdemes mindig berajzoltatnunk azokat a függőleges aszimptotákat, ahol e függvények nincsenek értelmezve, hiszen ezek megkönnyítik a jellemzést is. Mindig ügyeljünk arra, hogy egyetlen periódusnál nagyobb intervallumon ábrázoljuk e függvényeket!

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x)=\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$ függvényt!

Megjegyzés

Az ábrázoláshoz ismét át kell alakítanunk a függvényt: $f(x)=\mathrm{t\,g}\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ hiszen így jobban értelmezhető a két transzformáció: az x tengely mentén negatív irányban $\frac{2\pi}{3}$ egységgel történő eltolás, illetve a vízszintes irányú kétszeres nyújtás, amelynek fixpontja a függvény $x = -\frac{2\pi}{3}$ egyenesre eső pontja *(18. ábra)*.



18. ábra

A jellemzés előkészítéseként tisztázzuk, hogy a függvény periódusa 2π , amit a képlet alapján is kiszámíthatunk.

Jellemzése:

- $D_f = R | \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$, $R_f = R$
- menete: szigorúan monoton nő, ha $x \in \left] -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right[$
- szélsőértéke nincs
- zérushelye: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$
- nem korlátos; nem páros, nem páratlan; periódusa 2π .

A 11. évfolyamon kerül sor az exponenciális és a logaritmus-függvények értelmezésére.

Definíció

Legyen $a > 0$, $a \neq 1$. Ekkor az $f : R \rightarrow R^+$, $f(x) = a^x$ függvényt <u>*a alapú exponenciális függvénynek*</u> nevezzük.

Az alapfüggvény(ek) ábrázolása során a következő tulajdonságokat kell kiemelnünk:

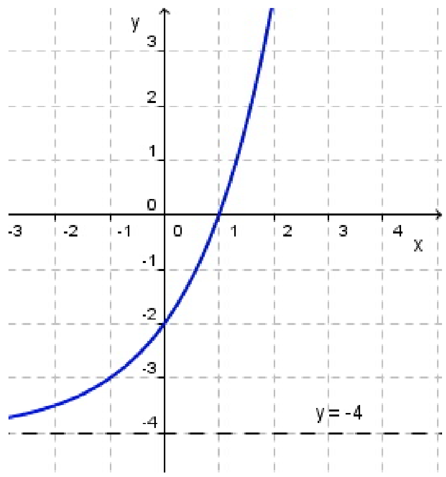
- a függvényérték mindig pozitív, a függvény csak „határtalanul megközelíti”, de nem metszi az x tengelyt, vagyis ez a függvénycsoport alulról korlátos;
- minden exponenciális alapfüggvény a $(0;1)$ pontban metszi az y tengelyt, hiszen minden pozitív szám nulladik hatványa 1;
- $0 < a < 1$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő, $a > 1$ esetén pedig szigorúan monoton növekvő.

Példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x) = 2^{x+1} - 4$, $x \in R$ függvényt!

Megjegyzés

Érdemes felhívnunk a figyelmet arra, hogy a fenti képlet egy x tengely mentén negatív irányban 1 egységgel történő eltolást sugall, a hatványozás azonosságai segítségével azonban átalakítható $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ alakúvá, ami viszont kétszeres nyújtást jelent az y tengely mentén. A kétféle megközelítés természetesen ugyanazt a függvényképet kell, hogy eredményezze. Az ábrázolás során jó berajzolni az y = -4 aszimptotát is *(19. ábra)*.



19. ábra

Jellemzése:

- $D_f = R, \quad R_f = \left]-4;+\infty\right[$
- menete: szig. mon. nő
- szélsőértéke nincs
- zérushelye: x = 1
- alulról korlátos
- paritása nincs
- nem periodikus

A zérushely meghatározásának problémájával bevezethetjük az exponenciális egyenletek témakörét.

Definíció

Legyen $a > 0,\ a \neq 1$. Ekkor az $f : R^+ \to R,\ f(x) = \log_a x$ függvényt <u>*a alapú logaritmusfüggvénynek*</u> nevezzük.

Az alapfüggvény(ek) ábrázolása során a következő tulajdonságokat kell kiemelnünk:

(1) a függvény argumentuma mindig pozitív, a függvény csak „határtalanul megközelíti”, de nem metszi az y tengelyt;

(2) minden logaritmus alapfüggvény az $(1;0)$ pontban metszi az x tengelyt, hiszen minden lehetséges a logaritmusalap esetén $\log_a 1 = 0$;

(3) $0 < a < 1$ esetén a függvény szigorúan monoton csökkenő, $a > 1$ esetén pedig szigorúan monoton növekvő.

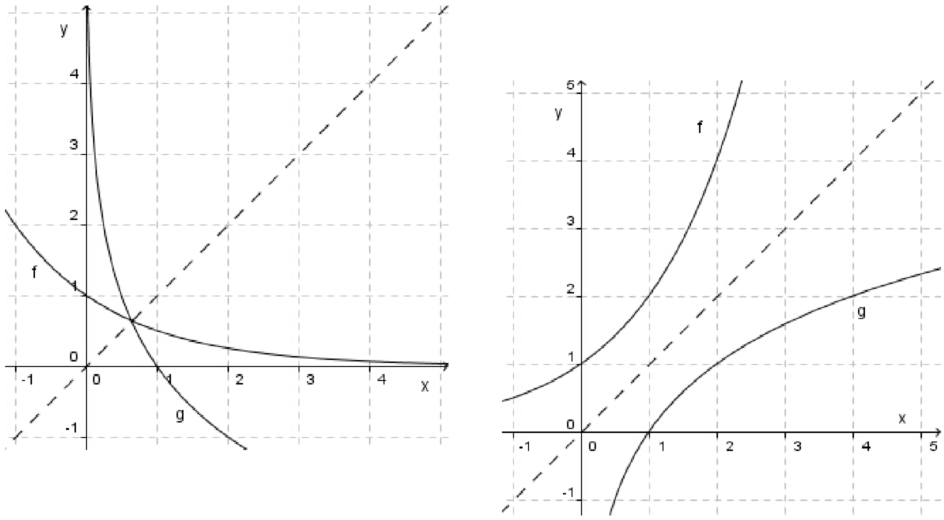
A fenti két függvénytípus alkalmat ad a számunkra, hogy bevezessük az *inverz függvény* fogalmát.

Definíció

A *g* függvény az *f* függvény <u>*inverz függvénye*</u>, ha $D_f = R_g$, $D_g = R_f$, és $\forall\ x \in D_f$ esetén $g(f(x)) = x$, továbbá $\forall\ y \in D_g$ esetén $f(g(y)) = y$. Jele: $g = f^{-1}$.

E témakör tárgyalása során is érdemes a táblagépekkel vagy számítógépek mellett dolgozni, hogy közös koordináta-rendszerben ábrázolva minél több inverzfüggvény-párt, felismertethessük, hogy az inverz függvények grafikonjai egymásnak az y = x egyenesre vonatkozó tükörképei *(20. ábra)*.

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ g(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ $\qquad$ $f(x)=2^x,\ g(x)=\log_2 x$



20. ábra

A középiskolai tananyag egyéb fejezeteiben is számos alkalommal kell hivatkoznunk a függvényekre. Mindenekelőtt a sorozatokról kell tudatosítanunk, hogy ezek is speciális, a természetes számok halmazán értelmezett függvények. Emellett a geometriai transzformációk függvény-tulajdonságait is lényeges hangsúlyoznunk, de megjelenik a függvényszemlélet például a terület, a térfogat és a valószínűség fogalmának kialakításakor is.

Az emelt szintű tananyag a függvényvizsgálat egyéb lényeges vonatkozásait is tartalmazza. Kitér a határérték-számítás alapismereteire, a függvény folytonosságára, bevezeti a differenciálhányados fogalmát. Felhasználja a derivált függvényt a függvényvizsgálat, illetve szélsőérték-feladatok megoldása során. Definiálja a függvény határozatlan és a határozott integrálját, ennek segítségével területet és térfogatot számoltat.

Számsorozatok

Az általános iskolában már az alsó tagozattól évről évre visszatérően foglalkoznak a számsorozatokkal. Eleinte a sorozatok szabályának felismerése, folytatása, kiegészítése a cél, majd az összefüggések keresése az egyszerű sorozatok elemei között. A felső tagozaton folytatódik az egyszerűbb sorozatok megismerése. Speciális sorozatokat vizsgálnak, példákat mutatnak a számtani sorozatra, megtanulják összeadni annak elemeit.

A középiskolában is előkerül egy-egy, a számsorozatokhoz kapcsolódó feladat az alsóbb évfolyamokon, de hagyományosan a 11. évfolyam végén, vagy a 12. évfolyam elején tűzzük ki újra a témakört. Ekkor mindenekelőtt megadjuk a számsorozat fogalmát.

Definíció

Az $a: N^+ \to R$ függvényt <u>*számsorozatnak*</u> nevezzük.

A definíció természetesen kiterjeszthető véges sorozatokra is, azaz olyan speciális függvényekre, amelyeknek értelmezési tartománya $D_a = \{ 1; 2; 3; ...; n \}$. Később, a kamatoskamat-számítás kapcsán pedig azt is láthatjuk, hogy néha célszerű értelmezni a számsorozat nulladik elemét is. A jelölésre is fel kell hívnunk a figyelmet: a függvény-jelleget kevésbé hangsúlyozó a_n csupán egyszerűsített írásmódja az $a(n)$ formulának.

A sorozat megadási módjai közt meg kell említenünk az általános képlettel (pl. $a_n = 2^{n+3}$, $n \in N^+$), továbbá a rekurzív módon (pl. $a_1 = 16$, $a_n = 2a_{n-1}$, $n \in N$, $n > 1$) történő megadást. Mindezt változatos példákon gyakoroltathatjuk, módot adva arra, hogy a korábbi fejezetek tananyagát is felvillantsuk.

Példa

Adjuk meg a következő sorozatok egy hozzárendelési szabályát képlettel és rekurzív módon egyaránt:

a) $\frac{1}{3}$; 1; 3; 9; 27; ...

b) 1; 4; 7; 10; ...

c) 1; -1; 1; -1; ...

Megjegyzés

Mindhárom feladat esetén hamarabb ismeri fel a diákok többsége a rekurzív megadási módot, mint a képlettel történő leírást; ez utóbbira sokszor rá kell vezetnünk őket. Egy-egy lehetséges megadási mód:

a) $a_n = 3^{n-2},\ n \in N^+$, illetve $a_1 = \frac{1}{3},\ a_n = 3a_{n-1},\ n \in N,\ n > 1$

b) $b_n = 3n - 2,\ n \in N^+$, illetve $b_1 = 1;,\ b_n = b_{n-1} + 3,\ n \in N,\ n > 1$

c) $c_n = (-1)^{n+1},\ n \in N^+$, illetve $c_1 = 1,\ c_n = -c_{n-1},\ n \in N,\ n > 1$

Példa

Adjuk meg általános képlettel az alábbi sorozatok n-edik elemét:

a) 3; 2; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{2}$; 1,4; ...

b) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 1; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$; 0; $-\frac{1}{2}$; ...

Megjegyzés

Az a) feladat megoldása során segíthet, ha minden elemet felírunk közönséges tört alakban, a negyediket pedig 2-vel bővítjük $\left(\frac{3}{1};\ \frac{4}{2};\ \frac{5}{3};\ \frac{6}{4};\ \frac{7}{5}\right)$. Így már könnyebb rátalálni a megoldásra $\left(a_n = \frac{n+2}{n},\ n \in N^+\right)$. A b) feladat megoldása során reménykedhetünk abban, hogy a diákok emlékeznek a nevezetes szögfüggvényekre $\left(b_n = \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right),\ n \in N^+\right)$.

A rekurzív függvények tárgyalása során térjünk ki a Fibonacci-sorozatra, megemlítve annak matematika- és kultúrtörténeti, valamint tudományos vonatkozásait. Célszerű akár kiselőadásként, PowerPoint bemutatóként is kitűzni, hiszen az érdeklődő diákok általában szívesen vállalnak ilyen feladatot. A tehetséges diákok számára kitűzhetjük a következő példát is.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy az $f_1 = 1;\ f_2 = 1;\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1};\ n \in N,\ n > 2$ módon definiált Fibonacci-sorozat *n*-edik elemére teljesül az

$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ összefüggés!

Érdemes megemlítenünk, hogy a sorozatok mint speciális függvények vizsgálhatók az egyes függvénytulajdonságok teljesülése szempontjából is. Kiemelendő ezek közül a monotonitás és a korlátosság vizsgálata. Emelt szinten természetesen a sorozatok konvergenciájával, határértékével is foglalkoznunk kell.

E bevezető, illetve a sorozatok általános vizsgálata után rátérünk a számtani sorozatok ismertetésére.

Definíció

Az $< a_n >$ számsorozatot *számtani sorozatnak* nevezzük, ha bármely két egymást követő elemének azonos módon képezett különbsége állandó.

A definíció kiegészítéseként elmondjuk, hogy a $d = a_{n+1} - a_n$ különbség a számtani sorozatra jellemző érték, a sorozat *differenciája*. Azt is fel kell ismertetnünk, hogy egy számtani sorozatot akkor tekinthetünk adottnak, ha az első elemét és a differenciáját ismerjük.

A számtani sorozattal kapcsolatban három összefüggést kell megmutatnunk és bizonyítanunk: az n-edik elem kiszámítási módját, az első n elem összegére vonatkozó képletet, továbbá annak magyarázatát, hogy miért is nevezhetjük ezt a sorozattípust számtaninak.

Tétel

Legyen a számtani sorozat első eleme a_1, differenciája *d*. Ekkor a számtani sorozat *n*-edik eleme: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,\ \forall\ n \in N^+$ esetén.

Tétel

Legyen a számtani sorozat első eleme a_1, differenciája *d*. Ekkor a számtani sorozat első *n* elemének összege:

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)\cdot d)\cdot n}{2}, \quad \forall\ n \in N^+ \text{ esetén.}$$

Tétel

A számtani sorozat tetszőleges eleme a rá szimmetrikusan elhelyezkedő elemeinek számtani közepe: $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $\forall\ n, k \in N^+$, $n > k$ esetén.

Ezeket a tételeket célszerű bizonyítanunk is. Az első tétel bizonyítása történhet például a teljes indukció módszerével, míg a második bizonyítása alkalmat adhat matematika-történeti kitekintésre: a kis Gauss nevezetes történetét is felidézhetjük általa. A harmadik tétel a definíció, illetve az n-edik elem kiszámítási képlete alapján szintén könnyen belátható.

A fogalomkör és a képletek begyakorlása változatos feladatok segítségével történhet. Az „*Adjuk meg azt a számtani sorozatot, amelyre…*” típusú feladatok egyrészt a fogalmat, képleteket hivatottak elmélyíteni, másrészt felidézhetjük segítségükkel az egyenletrendszerek megoldásának változatos módszereit.

Példa

Adjuk meg azt a számtani sorozatot, amelyben a negyedik, ötödik és hatodik elem összege 24, ugyanezen elemek szorzata pedig 494!

Megjegyzés

Az ilyen jellegű példák segítségével megmutathatjuk, hogy nem mindig célszerű a jelölésekkel a „kályhához”, azaz a legelső elemhez visszatérni. Itt például sokkal egyszerűbb a dolgunk, ha az ötödik elemet és a differenciát jelöljük *a*-val, illetve *d*-vel. Ekkor az

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a - d + a + a + d = 24 \\ (2) & (a-d)\cdot a\cdot(a+d) = 494 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszerhez jutunk. Az első egyenletből $a = 8$, majd a másodikból $d = \pm 1{,}5$ adódik, így a feladat megoldásai: $a_1 = 2,\ d = 1{,}5$, illetve $a_1 = 14,\ d = -1{,}5$.

Nem feledkezhetünk el a szöveges feladatok gyakoroltatásáról sem a témakör kapcsán.

Példa

Egy áruház születésnapi nyereményjátékot hirdet, amelyen annyi vásárlót jutalmaznak, ahány éves az áruház. Az első helyezett 25.000 Ft-ot kap, a további nyertesek összesen 128.000 Ft-ot, és mindegyikük 2000 Ft-tal kevesebbet, mint az őt megelőző. Hány éves az áruház?

Megjegyzés

A diákok egy része egyesével leírja és összeadogatja az egyes nyeremény-értékeket, amíg el nem jut a kívánt összeghez. Az ilyen megoldást akkor fogadhatjuk el teljes értékűként, ha folyamatosan jelzi a részletösszegeket, továbbá kijelenti, hogy a megtalált n=9 az egyetlen megoldás, hiszen az összegek sorozata szigorúan monoton növekvő (amíg van értelme a feladatnak, azaz az egyes elnyert értékek pozitívak). A „szabálykövető" tanulók képletekben gondolkodnak, és így az

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & a_1 = 25.000 \\ (2) & d = -2000 \\ (3) & S_n = 153.000 \end{array}\right\}$$

adatokhoz jutnak – hacsak el nem tévesztik a d előjelét, illetve nem feledkeznek el az első elem hozzáadásáról az összeghez. Ebből az $n^2 - 26n + 153 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, aminek két megoldása: $n_1 = 9$, $n_2 = 17$. Az egyszerű ellenőrzés során mindkét értéket helyesnek találjuk, de fel kell ismertetnünk, hogy az utóbbi nem lehet megoldása a feladatnak. Ezt például úgy tehetjük meg, hogy kiszámoljuk az a_{17} értékét. Mivel ez negatív (-7000), így a feladat egyetlen megoldása az $n = 9$ lehet.

A mértani sorozatokat érdemes kétféleképpen definiálni, és felismertetni a két definíció közti különbséget.

Definíció1

Az $< a_n >$ számsorozatot *mértani sorozatnak* nevezzük, ha bármely két egymást követő elemének azonos módon képezett hányadosa állandó.

Definíció2

Az $< a_n >$ számsorozatot *mértani sorozatnak* nevezzük, ha (a második elemétől kezdve) bármely eleme az őt megelőző elemének ugyanazon számszorosa.

Elvárható, hogy a diákok felismerjék: az első esetben a hányadosokat nem tudjuk képezni, ha a nevező egyenlő 0-val, így ez a definíció csak azokat a mértani sorozatokat értelmezi, ahol $a_1 \neq 0,\ q \neq 0$, míg a második az utóbbi eseteket is kezelni tudja.

A definíció kiegészítéseként itt is elmondjuk, hogy az $a_{n+1} = q \cdot a_n$ összefüggésben szereplő q érték a mértani sorozatra jellemző érték, a sorozat hányadosa (kvóciense). Azt is fel kell ismertetnünk, hogy egy mértani sorozatot akkor tekinthetünk adottnak, ha az első elemét és a kvóciensét ismerjük.

A mértani sorozattal kapcsolatban szintén három összefüggést kell megmutatnunk és bizonyítanunk: az n-edik elem kiszámítási módját, az első n elem összegére vonatkozó képletet, továbbá annak magyarázatát, hogy miért is nevezhetjük ezt a sorozattípust mértaninak.

Tétel

Legyen a mértani sorozat első eleme a_1, hányadosa q. Ekkor a mértani sorozat n-edik eleme: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $\forall\ n \in N^+$ esetén.

Tétel

Legyen a mértani sorozat első eleme a_1, hányadosa q. Ekkor a mértani sorozat első n elemének összege: $S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & ha\ q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & ha\ q = 1 \end{cases}$ $\quad \forall\ n \in N^+$ esetén.

Tétel

A nemnegatív elemekből álló mértani sorozat tetszőleges eleme a rá szimmetrikusan elhelyezkedő elemeinek mértani közepe: $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$, $\forall\ n, k \in N^+$, $n > k$ esetén.

Ezeket a tételeket is célszerű bizonyítanunk. Az első tétel bizonyítása történhet például a teljes indukció módszerével, míg a másodiké konstruktívan, az S_n és a $q \cdot S_n$ összeg felírásával, majd egymásból történő kivonásával. Ekkor, a q-1-gyel történő osztás előtt ismertethetjük fel, miért is kellett a tételben külön kezelnünk a q=1 esetet. A harmadik tétel a definíció, illetve az n-edik elem kiszámítási képlete alapján szintén könnyen belátható.

A témakör bevezető feladatai itt is a fogalom, illetve a képletek elmélyítését szolgálják, továbbá újabb egyenletrendszer-megoldási módszereket eleveníthetünk fel segítségükkel.

Példa

Egy mértani sorozat harmadik, negyedik és ötödik tagjának összege 27, ötödik, hatodik és hetedik tagjának összege pedig 108. Határozza meg a sorozatot!

Megjegyzés

Ha az első elem és a kvóciens segítségével írjuk fel a szövegből kibontható összefüggéseket, majd szorzattá alakítunk, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a_1 \cdot q^2\left(1+q+q^2\right)=27 \\ (2) & a_1 \cdot q^4\left(1+q+q^2\right)=108\end{array}\right\}$$

Miután tisztáztuk, hogy megtehetjük, osszuk el egymással a két egyenlet megfelelő oldalait. Egyszerűsítés után a $q^2=4$ egyenlethez jutunk. A két értéket valamelyik egyenletbe visszahelyettesítve a két megoldás: $a_1=\frac{27}{28}$, $q=2$, illetve $a_1=\frac{9}{4}$, $q=-2$.

A témakör szöveges feladatai elsősorban a kamatoskamat-számításhoz kapcsolódnak. Ahogyan azt korábban említettük, ezen feladatok feldolgozása során szerencsés a kezdeti értékre nulladik elemként hivatkozni, hiszen így könnyebb az összefüggések feltárása.

Példa

Tamás három éven át havi 40.000 Ft-ot tesz a bankba, évi 8%-os kamatra. A betét havi kamatozású, azaz a kamatot havonta hozzáírják a betett összeghez. Hány forintot vehet fel Tamás a 36. hónap végén?

Megjegyzés

Az ilyen típusú feladatok egy része világosan megfogalmazza, hogy számoljunk úgy a havi kamattal, mintha az az éves kamat $\frac{1}{12}$ része volna. Most azonban nem találunk ilyen kitételt, úgyhogy mindenekelőtt a havi kamatot kell kiszámolnunk. A $t \cdot x^{12}=t \cdot 1{,}08$ összefüggésből $x=\sqrt[12]{1{,}08} \approx 1{,}00643$, azaz a havi kamat $p=0{,}643\ \%$. Meg kell értetnünk,

hogy ez ugyan nem sokkal kevesebb, mint a $\frac{8}{12} \approx 0{,}667$, de nagy betétek esetén a különbség jelentős lehet. Ezek után felírjuk az egyes részletek kamatos kamattal megnövekedett összegét:
$S = 40.000 \cdot \left(x^{36} + x^{35} + \ldots + x\right)$, majd felismertetjük, hogy a zárójelben egy x kezdeti értékű, x kvóciensű mértani sorozat első 36 elemének összege áll, így a képlet alkalmazásával megválaszolhatjuk a kérdést: $S = 40.000 \cdot x \cdot \frac{x^{36} - 1}{x - 1} \approx 1.624.878$ Ft.

Példa

Hány év alatt növekszik a háromszorosára az évi 7,5%-os kamatos kamatozásra betett pénzösszeg?

Megjegyzés

Az ilyen típusú feladatokban az adathiány zavarhatja meg a diákokat. Rá kell mutatnunk, hogy az $a_0 \cdot 1{,}075^n = 3a_0$ egyenletben bátran egyszerűsíthetünk az $a_0 \neq 0$ értékkel. Ezután a 10-es alapú logaritmus alkalmazásával adódik az $n = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}075} \approx 15{,}19$ érték. Arra is figyelnünk kell, hogy ilyenkor mindenképpen felfelé kell kerekítenünk, hiszen 15 év múlva még nem lesz háromszorosa a pénzünk a betett összegnek. A helyes válasz így n = 16 év.

Olyan feladatokra is példát kell mutatnunk, amelyek egyszerre vonatkoznak számtani, illetve mértani sorozatokra.

Példa

Egy számtani sorozat első három elemének összege 6. Ha az első elemet változatlanul hagyjuk, a másodikhoz 4-et adunk, a harmadikból pedig 19-et elveszünk, egy mértani sorozat három egymást követő eleméhez jutunk. Melyik ez a számtani sorozat?

Megjegyzés

Tudatosítanunk kell, hogy a számtani sorozat *d* differenciája és a mértani sorozat *q* kvóciense közül csupán az egyiket érdemes bevonnunk a vizsgálódásba. Ha esetünkben ez a *d* lesz, akkor a számtani sorozat második elemét *a*-val jelölve az első összefüggés $a - d + a + a + d = 6$ alakú, amiből $a = 2$ következik. A mértani sorozat három eleme így

$2-d$, 6, $d-17$. A mértani középre vonatkozó tételt most csak olyan formában használhatjuk, hogy „a két szélső elem szorzata megegyezik a középső négyzetével”, hiszen nem tudhatjuk, pozitív, vagy negatív elemekkel van-e dolgunk. Ebből a $d^2-19d+70=0$ másodfokú egyenlet adódik, amelynek megoldásai: $d_1=5$, $d_2=14$. Az első esetben a számtani sorozat elemei -3; 2; 7, míg a második megoldás elemei -12; 2; 16. Az ellenőrzésről természetesen itt sem szabad megfeledkeznünk.

Emelt szinten a fentiek természetesen kiegészülnek a számsorozatok függvénytani vizsgálatával: itt elsősorban a monotonitást, a korlátosságot és a konvergenciát kell nagyító alá vennünk. A kamatoskamat-számítás témakörén belül ki kell térnünk a járadékszámítás, hiteltörlesztés feladataira. Be kell vezetnünk a sorozatokból képezett sorok fogalmát, különös tekintettel a mértani sorokra, azok konvergenciájára. Ez utóbbi alkalmat ad a végtelen szakaszos tizedes törtek 9. évfolyamon már megismert tulajdonságainak újra, magasabb szinten történő tárgyalására.

11. FEJEZET

Geometria

Geometriát az általános iskola 1. osztályától a középiskola 12. osztályáig tanítunk, igaz a témakör részaránya a matematika tantárgyon belül évfolyamonként eltérő. Az ún. elemi (szintetikus) geometriát 5-10. évfolyamon tanítjuk önálló témakörként, s ekkor a legnagyobb a geometria aránya a többi témakörhöz viszonyítva.

Középiskolában csak az euklideszi geometriával foglalkozunk, annak axiomatikus felépítéséről beszélünk ugyan, de a tárgyalásmód nem követi szigorúan az axiomatika elveit, keverednek benne az intuitív és a deduktív vonások hasonlóan a többi matematikai témakör tanításához. A nem-euklideszi geometriák megemlítése középiskolában két ok miatt célszerű. Az axiomatikus rendszerekről, azok logikai felépítéséről tudnak meg többet a tanulók, ha nem csupán egy geometriai rendszerről hallanak. A Bolyaiak eredményeinek jelentőségéről nem tudunk beszélni anélkül, hogy a párhuzamossági axióma szerepéről, annak lehetséges tagadásáról, és a hiperbolikus geometria felépítésének alapjairól ne ejtenénk szót.

A geometria témakör a következő kisebb egységekre osztható: síkgeometria, térgeometria, geometriai mérések, geometriai transzformációk. A felosztás nem merev, vannak kapcsolódási pontok az egyes résztémakörök között. Ugyancsak szoros a kapcsolat a trigonometria, a koordináta- és vektorgeometria témakörökkel. Ezeket a kisebb témaköröket nem egymást követően, hanem párhuzamosan tanítjuk, hiszen például az egybevágósági és hasonlósági transzformációkról szerzett ismeretek nélkül nem tudjuk a háromszögekkel kapcsolatos ismeretek jó részét tárgyalni.

A témakörön keresztül jó lehetőség nyílik a halmazok és a logika fejezetek tananyagának elmélyítésére, a geometriai transzformációk pedig a függvények témakörhöz köthetők.

11.1. Síkgeometria

A középiskolában 9-10. évfolyamon tanítunk síkgeometriai ismereteket, erősen támaszkodva az általános iskolában megszerzett tudásra. Célunk, hogy rendszerezzük a meglévő ismereteket, valamint az, hogy az euklideszi geometria logikai felépítésébe is bepillantást nyerjenek a tanulók. Az alapfogalmak, definíciók, ill. az axiómák, tételek rendszerének bemutatása hozzásegít a gondolkodás logikai struktúrájának megértéséhez, a matematikában használt nyelv logikai alkotóelemeinek elsajátításához.

A geometriai fogalmak és összefüggések megismerése az általános iskolában a globális tulajdonságoktól, a szemléletestől halad az absztraktabb megállapítások felé. A felső tagozaton előforduló tételeket sok esetben kísérletezgetések eredményeként mondjuk ki, szemléletre épülő „bizonyításokat" közlünk. Ezt a tárgyalásmódot váltja fel 9. osztályban a formális dedukció. A témakör felépítése ezen az évfolyamon rendszerezéssel, szintetizálással kezdődik.

Az euklideszi geometria néhány alapfogalmára (pont, egyenes, sík, illeszkedik) építve szisztematikusan tárgyaljuk a térelemek kölcsönös helyzetét, távolságát, hajlásszögét. A síkgeometriai fogalmak vonatkozásában nem lépünk túl az általános iskolai tananyagon (pl. két egyenes párhuzamos, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk), ám a térre kiterjesztve ezeket a relációkat, célszerű pontos megfogalmazást kérni a nehezebb esetekben is. Pl. két kitérő egyenes távolsága, hajlásszöge, vagy két metsző sík hajlásszöge.

A megértésben segítségünkre lehet a halmazszemlélet: a geometriai objektumokat ponthalmazoknak tekintve azok közös pontjainak meglétére vagy hiányára helyezzük a hangsúlyt. Ponthalmazok távolságát a két ponthalmaz pontjait összekötő összes lehetséges szakasz közül a legrövidebbnek a távolságával adjuk meg (ha ilyen nincs, akkor pontos alsó korlátjukkal), míg a hajlásszöget két metsző egyenes hajlásszögére vezetjük vissza.

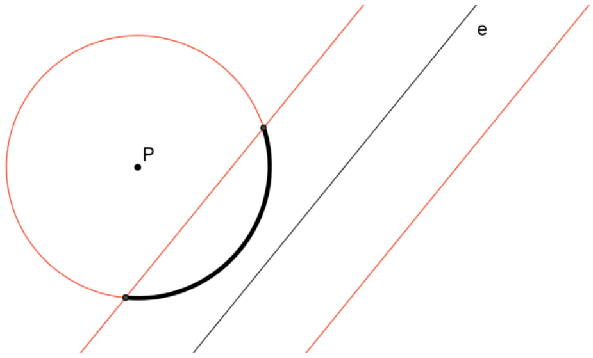
A halmazszemléletet a geometriában egy vagy két tulajdonsággal rendelkező pontok halmazának meghatározásával is erősítjük.

Példa

Adjuk meg a *P* ponttól *3cm* távolságra és az *e* egyenestől legfeljebb *2cm* távolságra levő pontok halmazát!

Megoldás

A megoldáshoz a feladatot két részre kell bontani. Külön határozzuk meg a két feltételnek eleget tevő két ponthalmazt, a *P* középpontú, *3 cm* sugarú körvonalat és az *e* egyenestől *2 cm*-re lévő párhuzamos egyenespár által határolt sávot. Ezután a szövegben szereplő „és” kötőszót értelmezve keressük a metszetüket (a megvastagított körívet) (*1. ábra*)



1. ábra

A szerkesztés során természetszerűleg felmerül a kérdés: Hányféle eset különböztethető meg a *P* pont és *e* egyenes egymáshoz viszonyított helyzetétől függően? A válasz jól szemléltethető dinamikus geometriai szerkesztőprogram segítségével úgy, hogy pl. az *e* egyenest rögzítjük és a P pontot (és vele együtt a kört) mozgatjuk. (A kört átlátszó anyagból kivágva ténylegesen is bemutathatjuk a különböző helyzeteket és megoldásokat.)

Megjegyzés

A halmazszemlélet jó előkészítést jelent a későbbiekben tanítandó koordinátageometriához. Hiszen ott a ponthalmazokat egyenletekkel, egyenlőtlenségekkel írjuk le, metszetük meghatározása pedig az egyenletrendszer (egyenlőtlenségrendszer) megoldását jelenti.

Amellett, hogy a geometriai objektumokat bizonyos tulajdonságokkal rendelkező ponthalmazokként fogjuk fel, ezek a feladatok az alapvető geometriai fogalmak elmélyítését és a szerkesztési rutin kialakítását is szolgálják.

Példa

Szerkesszünk egyenest, amely egy adott ponton átmegy és egy adott egyenessel előre adott szöget zár be!

Megoldás

A második feltétel értelmezése a következő ismereteket igényli: konvex szög, két egyenes hajlásszöge. Tudni kell azt is, hogy azok az egyenesek, amelyek egy adott egyenessel ugyanazt az adott szöget zárják be, egymással párhuzamosak. Így a keresett egyenest úgy kapjuk, hogy az adott ponton át párhuzamost szerkesztünk egy, az adott egyenest az adott szögben metsző egyenessel.

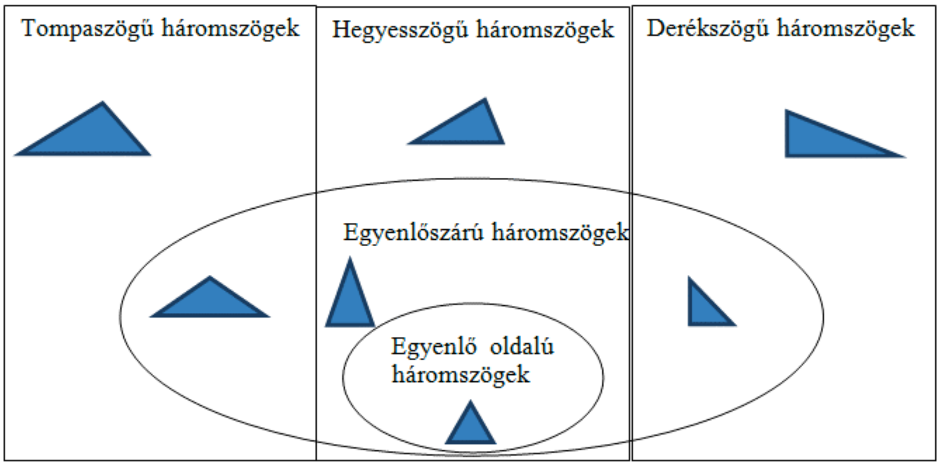
Megjegyzés

Mindkét bemutatott feladat megoldásának nehézsége elsősorban a feladat szövegének pontos megértésében rejlik. A geometriai feladatokra általában jellemző, hogy igen pontos szövegértést igényelnek, így általuk jól fejleszthető ez a fontos kompetencia.

A síkidomok tárgyalását a háromszögekkel kezdjük, ezt követi a négyszögek, majd az általános sokszögek tulajdonságainak megismerése, végül a kör geometriája. A síkidomok rendszerezése jó lehetőséget nyújt különböző fogalmi hierarchiák megértéséhez, azok összekapcsolásához.

11.1.1. Háromszögek

A háromszögeket többféle szempont szerint csoportosíthatjuk. Oldalaik szerint beszélünk egyenlő szárú és egyenlő oldalú háromszögekről. Szögeik alapján megkülönböztetünk hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögeket. Hasznos lehet mindezt Venn-diagramon is szemléltetni (*2. ábra*):



2. ábra

A háromszögekre vonatkozó tételek

Összefüggések a háromszög szögei között:

(1) A háromszög belső szögeinek összege *180°*.

(2) A háromszög külső szögeinek összege *360°*.

(3) A háromszög egy külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével.

Összefüggések a háromszög oldalai között:

(1) A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldal. (A háromszög egyenlőtlenség tétele)

(2) Derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével. (Pitagorasz-tétel)

(3) Ha egy háromszögben két oldal négyzetének összege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű (a Pitagorasz-tétel megfordítása)

Összefüggések a háromszög szögei és oldalai között

(1) Egy háromszög két oldala akkor és csak akkor egyenlő, ha a velük szemközti szögek egyenlők.

(2) A háromszögben két oldal közül a hosszabbal szemben nagyobb szög van és fordítva, két szög közül a nagyobbal szemben hosszabb oldal.

Megjegyzés
A tételek sokszor igen tömören megfogalmazott logikai állítások, melyek mindegyikében felismerhető a *ha ..., akkor …* szerkezet. Célszerű ezeket az állításokat átfogalmaztatni a tanulókkal, hogy világosan elkülönüljön a feltétel és a következmény. Ugyancsak értelmezni kell az „a háromszög” „egy háromszög” kifejezéseket logikai szempontból. Nem mondjuk ki ugyan, de ezekben az esetekben az univerzális kvantor használatáról van szó, azaz az állításunkat „minden háromszögre” fogalmazzuk meg.

A háromszög nevezetes vonalai: oldalfelező merőlegesek, szögfelezők, magasságvonalak, súlyvonalak, középvonalak

A jól ismert összefüggések tárgyalása többféleképpen is történhet, olyan felépítést kell választani, amelyben logikailag egymásra épülnek a fogalmak és tételek, azaz a tárgyalás során csak olyan ismereteket használunk fel, amelyekről azt megelőzően már volt szó. Egy ilyen lehetséges sorrend:

Induljunk ki az *oldalfelező merőlegesekből*.

Tétel
A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást, és ez a pont a háromszög köré írható kör középpontja.

Bizonyítás
A tétel bizonyítása a szakaszfelező merőleges definíciójára épül. Mivel két oldalfelező merőleges mindig metszi egymást, megmutatjuk, hogy ez a metszéspont egyenlő távol van mindhárom csúcstól, így rajta van a harmadik oldalfelező merőlegesen is, vagyis a három oldalfelező merőlegesnek közös pontja. Ennek a három egyenesnek nem lehet minden pontja közös, a megtalált pont az egyetlen, amely mindhárom egyenesen rajta van. A gondolatmenetből az is kiderül, hogy ez a pont egyenlő távolságra van a háromszög három csúcsától, így felhasználva a kör definícióját, kapjuk, hogy ez a háromszög köré írható körének középpontja.

Megjegyzés
A köré írható kör középpontjának a háromszöghöz viszonyított elhelyezkedését dinamikus geometriai szerkesztőprogrammal szemléltethetjük. A háromszög egyik csúcsának helyét, s ezáltal a szögét változtatva bemutathatjuk, hogy mikor lesz a középpont a háromszögön belül, ill. kí-

vül. Ily módon a Thalesz-tétel, pontosabban annak megfordítása is megsejthető.

Tétel
Ha egy kör átmérőjének két végpontját a kör bármely más pontjával összekötjük, akkor derékszögű háromszöget kapunk. (Thalesz-tétel)

Tétel
A derékszögű háromszög körülírható körének középpontja az átfogó felezőpontja. (Thalesz-tétel megfordítása)

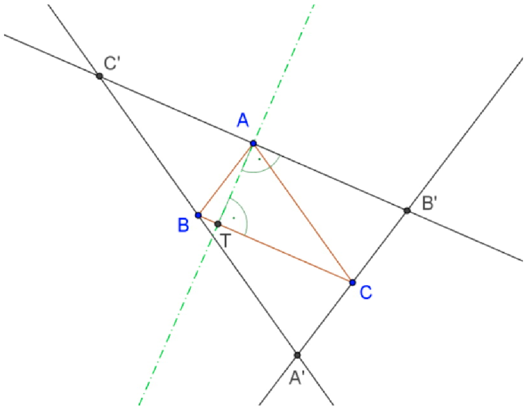
Az oldalfelező merőlegesek tételéhez analóg módon bizonyítható a *háromszög szögfelezőire* vonatkozó tétel. Ott azt használjuk ki, hogy a szögfelező olyan pontok halmaza, amelyek a szög két szárától egyenlő távolságra vannak.

Megjegyzés
Az oldalfelező merőlegesekre vonatkozó tétel bizonyításának megértése után a szögfelezőkre vonatkozó tétel az analógia miatt önállóan is bizonyítható.

Harmadikként a *magasságvonalakra* vonatkozó tételt tanítjuk:

Tétel
A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

Bizonyítás
Az első tételre építve ezt úgy bizonyítjuk, hogy a háromszög csúcsain keresztül párhuzamosokat húzunk a szemközti oldalakkal. (*3. ábra*) Az így nyert háromszögben az eredeti háromszög magasságvonalai oldalfelező merőlegesek lesznek. Ennek bizonyításához azonban szükségünk van a paralelogramma tulajdonságainak ismeretére, valamint arra, hogy ha két párhuzamos egyenest úgy metszünk egy harmadik egyenessel, hogy a keletkezett hajlásszögek egyike derékszög, akkor a másik is az (párhuzamossági axióma).



3. ábra

<u>*A középvonalakra*</u> vonatkozó tétel:

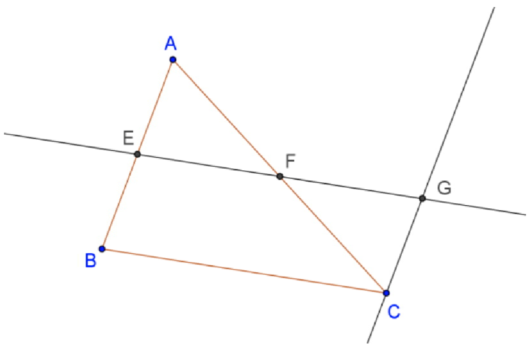
Tétel

A háromszög bármely középvonala párhuzamos a harmadik oldallal és hossza fele ennek az oldalnak.

Bizonyítás

A bizonyításhoz a paralelogramma tulajdonságai mellett a háromszögek egybevágóságát használjuk fel.

Húzzunk párhuzamost az ABC háromszög C csúcsán keresztül a szemközti oldallal és az AB oldal E felezőpontján át a BC oldallal. (4. *ábra*)



4. ábra

A keletkezett *EBCG* négyszög paralelogramma, hiszen szemközti oldalai páronként párhuzamosak. Ebből következik, hogy szemközti oldalai egyenlők (*EB*=*GC és BC*=*EG*).

Belátjuk, hogy az *EG* és *AC* szakaszok *F* metszéspontja felezi az *AC* és az *EG* oldalakat: Az *AEF* és a *CG*F háromszögek egybevágók, mert megegyezik egy-egy oldaluk (*AE*=*GC*), és az ezen oldalakon fekvő szögek (váltószögek). Tehát a két háromszög többi oldala is páronként egyenlő (*AF*= *CF és EF*=*FG*). Ebből pedig az következik, hogy a *BC* oldallal párhuzamos *EF* szakasz az *ABC* háromszög *BC* oldalhoz tartozó középvonala és fele a *BC* oldalnak.

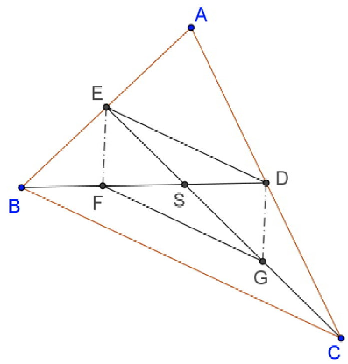
A *súlyvonalakra* vonatkozó tétel:

Tétel

A háromszög súlyvonalai egy pontban, a súlypontban metszik egymást. A súlypont a súlyvonalakat a csúcstól számítva 2:1 arányban osztja.

Bizonyítás

A bizonyításhoz szükségünk van a paralelogramma és a középvonal ismeretére. A két súlyvonal metszéspontja legyen *S*, továbbá jelölje *F* a *BS*, *G* a *CS* szakaszok felezési pontjait. (*5. ábra*)



5. ábra

Az *ED* és az *FG* szakaszok a *BC* oldalhoz tartozó középvonalak (előbbi az *ABC*, utóbbi a *BCS* háromszögben), ezért egyenlők és párhuzamosak. Ebből következik, hogy az *FGDE* négyszög paralelogramma, tehát átlói felezik egymást. Ez pedig azt jelenti, hogy *SD*=*SF(=FB)* és *ES*=*SG*

(=GC), vagyis az *S* pont mindkét súlyvonalnak a csúcsoktól távolabbi harmadolópontja. Mivel ezt a megállapítást bármely két súlyvonalból kiindulva megtehetjük, következik, hogy a harmadik súlyvonalnak is át kell haladnia ezen a harmadolóponton, ami a tétel igazolását jelenti.

Megjegyzések

A bizonyításokban a magasságvonal, középvonal és súlyvonal definícióján kívül a szakaszfelező merőleges, a szögfelező, a váltószögpár, a paralelogramma és az egybevágó háromszög fogalmát és tulajdonságait használtuk fel.

A bizonyítások menetének végigkövetése és megértése akkor is hasznos, ha magát a bizonyítást nem kérjük számon.

11.1.2. Négyszögek

A speciális négyszögek (trapéz, deltoid, paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet) bevezetése és rendszerezése jól segíti a fogalomalkotási folyamat fejlesztését, a definíció szerepének és a fogalmi hierarchiák felépülésének megértését.

A klasszikus definíció felépítése a következő: Megadunk a definiálandónál általánosabb fogalmat, majd ezt a halmazt szűkítjük le valamely speciális tulajdonság vagy tulajdonságok megadásával. Pl. A trapéz olyan *négyszög*, amelynek van két párhuzamos oldala.

Tipikus definiálási hibák a következők:

- A definíció még nem definiált fogalmat is tartalmaz. Pl. A paralelogramma olyan trapéz, amelynek két párhuzamos oldala egyenlő. (Amennyiben a trapéz fogalma még nem ismert.)
- A meghatározás körben forgó. Pl. Derékszögnek a 90°-os szöget nevezzük. 1° a derékszög 1 kilencvened része.
- Tág meghatározás: A definiálandó fogalom lényeges jegyét hagyjuk el. Pl. A paralelogrammának két-két oldala egyenlő. (ezek lehetnek szemköztiek vagy szomszédosak)
- Szűk meghatározás: Több jegyet veszünk a meghatározásba, mint amennyi szükséges. Pl. A paralelogramma szemközti szögei derékszögtől különböző egyenlő szögek.
- A definícióban olyan fogalmi jegyre utalunk, ami magából a definícióból következik. Pl. A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.

Ebben a témakörben gyakran adunk meg ugyanarra a fogalomra több különböző, azaz ekvivalens definíciót. Ekkor meg kell mutatnunk ezek egyenértékűségét.

Maradva a paralelogramma fogalmánál, a következő ekvivalens definíciókat használhatjuk:

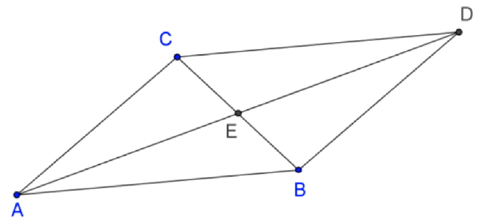
Definíció
A paralelogramma olyan négyszög, amelynek

(1) két-két szemközti oldala párhuzamos.
(2) két-két szemközti oldala egyenlő.
(3) két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő.
(4) két-két szemközti szöge egyenlő.
(5) bármely két szomszédos szöge 180°-ra egészíti ki egymást.
(6) átlói felezik egymást.
(7) középpontosan szimmetrikus.

A fentiek közül bármelyiket használhatjuk definícióként, a többi tételként fogalmazható meg. A definíciók egyenértékűsége tehát azt jelenti, hogy bármelyikből következik a másik. Például:

Tétel
Egy négyszögben két szemközti oldal párhuzamos és egyenlő akkor és csak akkor, ha a négyszög átlói felezik egymást.

Bizonyítás
Ha a két szemközti oldal *AB* és *CD* párhuzamos, akkor az átlók által meghatározott *ABE* és *CED* háromszögek megfelelő szögei csúcsszögek vagy váltószögek, tehát a két háromszögnek megegyeznek a szögei, továbbá a két oldal egyenlőségéből következően egy-egy oldaluk (*AB*=*CD*) is. Így ezek a háromszögek egybevágók, tehát a másik két oldal is páronként egyenlő (*EC*=*EB és AE*=*AD*), ami azt jelenti, hogy az átlók metszéspontja mindkét átlónak felezési pontja. (*6. ábra*)



6. ábra

Fordítva: Ha az átlók felezik egymást, akkor ismét két egybevágó háromszöghöz jutunk, mert az ABE és a CED háromszögeknek megegyezik két-két oldala ($CE=EB$ *és* $AE=ED$) és az ezek által közbezárt szögek (csúcsszögek). Következésképpen az AB és CD oldalak egyenlők, továbbá a másik két szögpár is egyenlő, s mivel a szögpár egyik szögszára egy egyenesre esik (az átló egyenesére), a másik szögszárak csak párhuzamosak lehetnek.

11.1.3. Sokszögek

A háromszögek és a négyszögek részletes tárgyalása után foglalkozunk néhány olyan tétellel, amelyek az általános sokszögekre vonatkoznak. Az átlók számára, a belső szögek összegére vonatkozó összefüggéseket a következőképpen általánosítjuk:

Tétel

Az n oldalú sokszög egy csúcsból húzható átlóinak száma: $n-3$, az összes átló száma: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

Tétel

Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$.

A konkáv és a konvex sokszög (mint sokszögtartomány) definiálása nem csak azért hasznos, mert matematikailag pontos meghatározást ad az általános iskolából ismert intuitív definícióra (el lehet bújni benne vagy nem), hanem azért is, mert szép példa egy kvantoros logikai állításra és annak tagadására.

Definíció

Egy sokszöget <u>*konvexnek*</u> nevezünk, ha ***bármely két*** pontját összekötve a kapott szakasz ***minden*** pontja illeszkedik a sokszögre.

Definíció

Azt a sokszöget, amely nem konvex <u>*konkávnak*</u> nevezzük.

Másképpen: Egy sokszöget <u>*konkávnak*</u> nevezünk, ha ***van két*** olyan pontja, melyet összekötve a kapott szakasznak ***nem minden*** pontja illeszkedik a sokszögre.

11.1.4. Körök

A kör az egyetlen olyan speciális síkidom, amely nem sokszög, és amellyel az iskolai matematika tananyagban találkoznak a tanulók (az ellipszis nem része a középszintű tananyagnak).

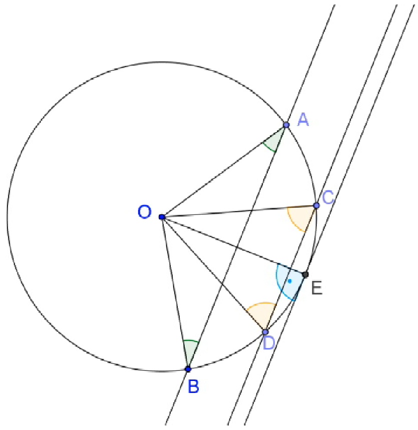
A kör és a körhöz kapcsolódó fogalmak (sugár, húr, átmérő, körív, érintő, szelő) egy részét már általános iskolából ismerik a tanulók. Új tananyagként a középponti szög, körcikk, körszelet, kerületi szög jelenik meg középiskolában.

A fogalmak rendszerezésénél célszerű kör és egyenes ill. két kör kölcsönös helyzeteit végigvizsgálni, és feleleveníteni a kapcsolódó tételeket. Például:

Tétel

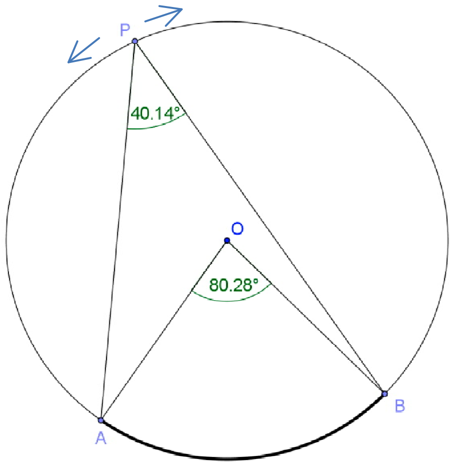
A kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra.

Ennek a tételnek a bizonyításával nem foglalkozunk, szemlélet alapján elfogadjuk, hogy az érintő a szelő „határhelyzete”, és mivel a szelő két metszéspontja a kör középpontjával egyenlőszárú háromszöget alkot, a két metszéspontot közelítve egymáshoz a két egyenlő szög egyre nagyobb lesz, határhelyzetben a két metszéspont egybeesik (*E*), a szög pedig *90°*. (*7. ábra*)



7. ábra

A kerületi és középponti szögek közötti összefüggéseket szintén nem bizonyítjuk, a szemléltetéshez dinamikus geometriai szerkesztőprogramot használhatunk: miközben kiíratjuk a kerületi és a középponti szög értékét, a kerületi pontot végigfuttatjuk a körvonalon. (*8. ábra*)



8. ábra

Tétel

A kör egy adott ívéhez tartozó középponti szög kétszerese az ugyanehhez az ívhez tartozó kerületi szögeknek. Ebből következik, hogy ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek egyenlők.

Megjegyzés

Érdemes felidézni a Thalesz-tételt mint a kerületi és középponti szögek tételének speciális esetét.

A háromszögeknél tanult köré írható és beírható kör fogalmát általánosítjuk négyszögekre, amikor bevezetjük a húrnégyszög és az érintőnégyszög fogalmát. Az anyagrész jól mutatja az analógia alkalmazásának korlátait: míg háromszögek esetében a kétféle kör mindig létezik, négyszögeknél már csak bizonyos feltételek megléte esetén.

A vázlatosan ismertetett síkgeometriai tananyagra támaszkodó geometriai feladatokat három nagy csoportba sorolhatjuk. Ezek: szerkesztési, bizonyítási és számítási feladatok.

11.1.5. Szerkesztési feladatok

Az euklideszi szerkesztésekről felső tagozaton már szereznek ismeretet és gyakorlatot a tanulók. A körző- és vonalzóhasználat mellett megtanulják az ún. alapszerkesztéseket (szakasz és szögfelezés, szakasz és szögmásolás, merőleges szerkesztése stb.).

Végeznek egyszerű háromszög-, négyszögszerkesztéseket is. Lényeges különbség azonban a középiskolához képest, hogy míg általános iskolában konkrét méretű szögekkel és oldalakkal dolgoznak, addig középiskolában tetszőleges szakaszokból és szögekből kell kiindulni. Ennek megfelelően itt fontos szerep jut a szerkesztés diszkussziójának.

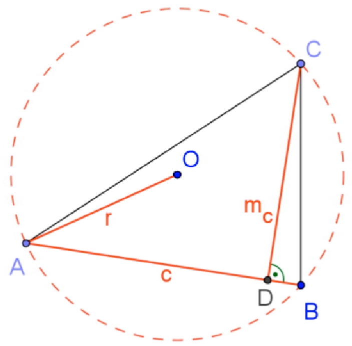
A szerkesztési feladatok megoldásának módját konkrét példán keresztül mutatjuk be.

Példa

Szerkesszünk háromszöget, ha adott az egyik oldala, a köré írt kör sugara és az oldalhoz tartozó magassága!

Megoldás

A szerkesztés első lépése egy jól látható vázlat elkészítése, amely segít megérteni a feladatot, bemutatja a szerkesztendő alakzatot, kiemelve benne a meglévő adatokat. (*9. ábra*)

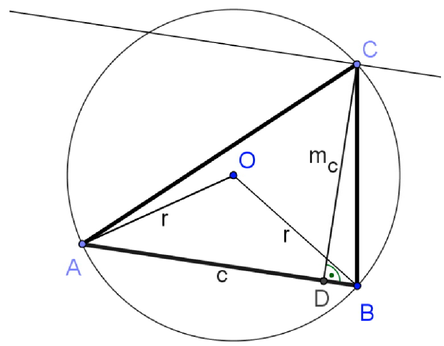


9. ábra

A vázlat tanulmányozásával alakítjuk ki a szerkesztési lépéseket, azaz adunk meg egy olyan algoritmust, melynek végeredménye a kívánt alakzat megszerkesztése.

A szerkesztést követően kérjük, hogy a tanulók írják le a szerkesztés menetét vázlatosan. Ezzel elsődleges célunk az, hogy gondolják újra át az egyes lépéseket. Ez a tudatosítás segít abban is, hogy majd más feladatba az itt elvégezett egyes részszerkesztéseket be tudják építeni. Természetesen a szerkesztés menetének leírása a tanár munkáját is segíti, hiszen így könnyebb megállapítani, hogyan gondolkodott a tanuló.

A szerkesztés egy lehetséges menete:Felvesszük a c oldalt, és így az A és B csúcsot. Megszerkesztjük az ABO egyenlőszárú háromszöget, melynek szárai az r sugárral egyenlő hosszúak. Megszerkesztjük a kört. A c oldallal, attól m_c távolságra párhuzamos egyenespárt húzunk. Az egyenesek és a kör metszéspontja adja a szerkesztendő háromszög C csúcsát (*10. ábra*).



10. ábra

Amikor konkrét adatokból indulunk ki, a szerkesztés menetét kitalálva és azt végrehajtva egyértelműen kiderül, hogy a kért alakzat megszerkeszthető-e vagy sem. Újabb konkrét adatokkal ismét elvégeztetve a szerkesztést rávezethetjük a tanulókat arra, hogy a kiindulási adatoktól nagymértékben függ a szerkesztés végeredménye. Példánkban pl. $c=6cm$, $r=5cm$, $m_c=7cm$ esetén a háromszög megszerkeszthető, míg pl. $c=6cm$, $r=2cm$, $m_c=7cm$ esetén nem.

A konkrét adatokról tetszőleges adatokra való áttérés nem egyszerű feladat a 9. évfolyamos tanulók számára. Hasonló absztrakciós fejlettséget feltételez, mint amikor az algebrát tanítjuk, és a számokkal végzett műveletek helyett az algebrai kifejezésekkel (betűkkel) kezdünk el dolgozni.

Előfordulhat, hogy már a szerkesztés során észrevesszük, hogyan függ az adatok felvételétől a megoldások száma, de a szerkesztést befejezve, azt újra átgondolva jutunk el a diszkusszióhoz. Ehhez azokat a szerkesztési lépéseket kell tudatosan megvizsgálni, amelyek nem minden esetben adnak eredményt.

A feladat diszkussziója:a kör O középpontja a háromszög egyenlőtlenségre vonatkozó tétel miatt akkor szerkeszthető, ha a sugár kétszerese nem kisebb a megadott c oldalnál. A C csúcs a kör és egy párhuzamos egyenespár metszeteként áll elő. Ez 0, 1, 2, 3, 4 megoldást jelent, attól függően, hogy milyen a viszonya az m_c magasságnak és az ABO háromszög alaphoz tartozó d magasságának ($d=0$, ha O az AB szakasz felezőpontja):

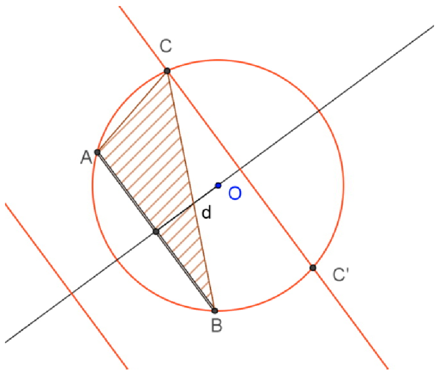
Ha $m_c>r+d$, akkor nincs megoldás.

Ha $m_c=r+d$, akkor egy megoldást, egy egyenlőszárú háromszöget kapunk.

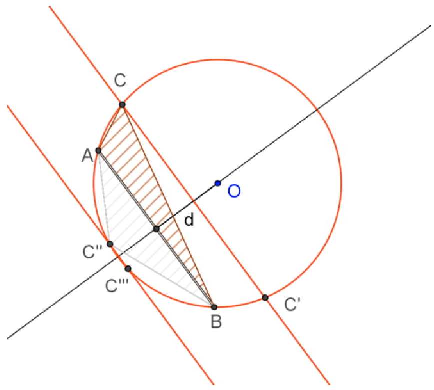
Ha $r\text{-}d<m_c<r+d$, akkor két megoldást kapunk, ezek egybevágó háromszögek. (*11. ábra*)

Ha $r\text{-}d=m_c$, akkor három megoldás van, közülük kettő egybevágó, egy pedig egyenlőszárú háromszög.

Ha $r\text{-}d>m_c$, akkor a megoldások száma 4, közülük 2-2 egybevágó. (12. *ábra*)



11. ábra



12. ábra

Megjegyzés

A szerkesztési feladatok diszkutálása nem lehet túl összetett, olyan feladatokat válasszunk, ahol legfeljebb két kérdéses lépés adódik, különben a diszkusszió áttekinthetetlenül bonyolult lesz.

A szerkesztési feladatok geometriai szerkesztőprogramokkal is elvégezhetők. Ebben az esetben a tanulók gondolkodásmódja némileg változik. A vázlat és a tervezés továbbra is papíron történik. A szerkesztés elvégzéséhez a program különböző funkcióit kell használni a körző és a vonalzó helyett. Ez kevésbé nagy kézügyességet igényel, ugyanakkor az euklideszi szerkesztés alaplépéseinek használata szükségszerűen tudatosabbá válik. Nem léphetünk tovább például, amíg ki nem jelöltük egy kör és egy egyenes metszéspontját (metszéspontjait), hiába „látszik” ez a pont. Mivel a program kört rajzol és nem csak körívet (mint mi a füzetbe), könnyebb megtalálni pl. két kör mindkét metszéspontját. A szerkesztés menetének leírása a tanár szempontjából nem szükséges, hiszen a lépések visszajátszhatók. A diszkussziós lépések megtalálása egyszerűbb, hiszen a kiindulási adatok egérrel változtathatók, így hamar kiderülhet, hogy mikor van és mikor nincs megoldás (a több megoldás esete nehezebben ismerhető fel). Természetesen az okok megtalálása már gondolkodást igényel.

11.1.6. Bizonyítási feladatok

A bizonyítási igény felkeltése és a bizonyítás nem csak a geometria-, hanem az egész matematikatanítás fontos feladata. A folyamat állítások igaz vagy hamis voltának eldöntésével kezdődik, majd a szemléletes belátással folytatódik, végül a rendelkezésre álló feltételekből kiinduló helyes logikai lépések sorozatán keresztül végigvitt matematikailag korrekt bizonyítással fejeződik be. A síkgeometria témaköre jó lehetőséget nyújt arra, hogy egyszerű, szemléletes állítások igazságértékét meglévő ismereteink birtokában logikailag helyes következtetések láncolatával igazoljuk vagy cáfoljuk.

A geometriai fogalmak és azok tulajdonságai alkalmasak összetett logikai állítások értelmezésére és igazságértékének eldöntésére.

Példa

Állapítsuk meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis! Indokolja a választ!

(1) Van két szimmetriatengellyel rendelkező deltoid.
(2) Minden paralelogrammának van szimmetriatengelye.
(3) Ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor az négyzet.
(4) A négyszögek közül egymásra merőleges átlói csak a négyzetnek és a rombusznak vannak.

Megoldás

Az állítások igazságértékének meghatározásához a bennük szereplő geometriai fogalmak pontos ismeretén túl matematikai logikai ismeretek helyes alkalmazására is szükség van. Ennek érdekében hasznos lehet az állítások átfogalmazása, úgy, hogy azokban a kvantorok és a logikai műveletek kötőszavai megjelenjenek.

(1) „*Van olyan* négyszög, amely deltoid *és* amelynek két szimmetriatengelye van.”Az állítás igaz, mert a rombusz is deltoid, s neki legalább két szimmetriatengelye van.
(2) „*Minden* négyszögre igaz, hogy *ha* az paralelogramma, *akkor* van szimmetriatengelye.”Az állítás hamis, ezt elegendő egy ellenpéldá-

val alátámasztani: az általános paralelogramma tengelyesen nem, csak középpontosan szimmetrikus.

(3) „*Minden* négyszögre igaz, hogy *ha* az átlói egyenlők, *akkor* az négyzet.”Az állítás hamis, ennek indoklásához ismét elegendő egy ellenpélda: az általános téglalap átlói egyenlő hosszúak.

(4) „*Minden* négyszögre igaz, hogy átlói *akkor és csak akkor* merőlegesek egymásra, *ha* az négyzet *vagy* rombusz.” Másképpen: „*Minden* négyszögre igaz, hogy *ha* átlói merőlegesek egymásra, *akkor* rombusz *vagy* négyzet, *és ha* rombusz *vagy* négyzet, *akkor* átlói merőlegesek egymásra.”Az állítás első része hamis, hiszen az általános deltoid átlói is merőlegesek egymásra. Az állítás második része igaz, mert a rombusz átlói merőlegesek. A két állítás konjunkciója, így a (4) állítás így hamis.

Megjegyzés

Természetesen formális logikai eszközöket nem tanítunk középiskolában, ám a matematikai nyelv logikailag pontos megértése és használata követelmény.

A bizonyítandó állítások (tételek) logikai szerkezete a következő: Ha *A* (feltétel, feltételek), akkor *B* (következmény). Egy állítás megfordítottján olyan állítást értünk, melyben a feltétel és a következmény szerepe megcserélődik: *Ha B, akkor A*. Egy állítást akkor nevezünk megfordíthatónak, ha az állítás mellett annak megfordítottja is igaz. Például a fenti példa (4) állítása nem megfordítható. A megfordítható tételek valójában két állítást tartalmaznak, ezért bizonyításuk mindig két részből áll.

A geometriai állításokban nem mindig könnyű megtalálni a fenti szerkezetet, ilyenkor az állítás átfogalmazása szükséges valamely vele ekvivalens állítássá.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög átfogója kétszer akkora, mint az átfogóhoz tartozó súlyvonal!

Megoldás

A bizonyítandó állításban a feltétel az, hogy a háromszög derékszögű, a következmény pedig, hogy az átfogó kétszer akkora, mint a hozzátartozó súlyvonal.

Ha egy háromszög derékszögű, akkor a Thalesz-tétel megfordítása szerint, a köré írható körének középpontja az átfogó felezőpontja. Mivel az átfogóhoz tartozó súlyvonal a felezőpontot a csúccsal köti össze, s így ennek a körnek sugara, az átfogó pedig az átmérője, a következmény igaz.

Megjegyzés

Ez az állítás megfordítható, mert bebizonyítható a következő is: Ha egy háromszög egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó súlyvonalnak, akkor ez a háromszög derékszögű. A bizonyításhoz azt használjuk fel, hogy az oldalfelező pont a feltétel szerint egyenlő távol van a háromszög három csúcsától, tehát a háromszög köré írható körének középpontja, az oldal pedig a kör átmérője. A Thalesz-tétel szerint pedig ekkor az oldallal szemközti csúcs derékszög.

A geometriai állítások változatossága biztosítja, hogy különböző bizonyítási módokat, gondolatmeneteket taníthatunk. A bizonyítás során meglévő tárgyi ismereteinket elmélyítjük, továbbá a problémamegoldó gondolkodást is fejlesztjük.

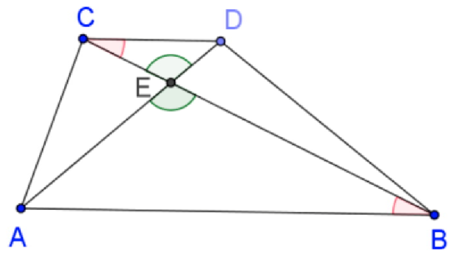
A bizonyító feladatokat sokszor meghatározó (nyílt végű) feladat formájában adjuk meg.

Példa

Egy trapéz egyik alapja a másiknak háromszorosa. Milyen arányban osztják egymást az átlók?

Megoldás

Első lépésként megrajzoljuk az állítás megértéséhez szükséges ábrát. (*13. ábra*)



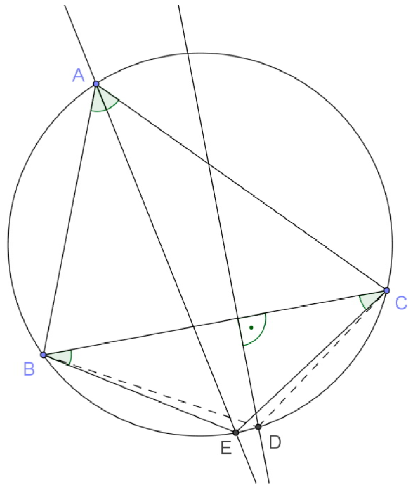
13. ábra

Sejtésünk az, hogy ugyanolyan, azaz *3:1* arányban osztják egymást az átlók is. Mivel az ábrán jelzett szögpárok a trapéz definíciója miatt páronként egyenlők, következik, hogy az *ABE* és a *DCE* háromszögek szögei páronként egyenlők, így a két háromszög hasonló. A hasonlóságból következik, hogy megfelelő oldalaik aránya megegyezik, így *AB:DC*= *AE:ED*=*EB:EC*. Mivel *AB:DC*=*3:1*, *AE:ED*=*EB:EC*=*3:1*. Ez azt jelenti, hogy az *E* metszéspont a két átlót valóban *3:1* arányban osztja.

Az indirekt bizonyítás elve az, hogy az állítás következményének tagadásából kiindulva ellentmondásra jutunk vagy egy axiómával, vagy egy tétellel, vagy kiinduló feltevésünkkel.

Példa
Bizonyítsuk be, hogy a háromszög bármelyik belső szögének szögfelező egyenese és a szemközti oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írt körön metszi egymást!

Megoldás
Indirekt módon tegyük fel, hogy a szögfelező és az oldalfelező merőleges nem a háromszög köré írt körön metszi egymást. Ez azt jelenti, hogy a körnek az oldalfelező merőlegessel és a körnek a szögfelezővel vett *D* és *E* metszéspontjai nem esnek egybe. (*14. ábra*)



14. ábra

A BE ívhez valamint az EC ívhez tartozó kerületi szögek egyenlőségéből – figyelembe véve, hogy AE szögfelező – következik, hogy a BEC háromszög egyenlő szárú. A BDC háromszög ugyancsak egyenlő szárú, hiszen D rajta van a háromszög oldalfelező merőlegesén. Mivel a $BECA$ és a $BDCA$ négyszögek húrnégyszögek, a két azonos alapú egyenlő szárú háromszög szárszögei megegyeznek ($180°-\alpha$), így a két háromszög egybevágó. Miután két csúcsuk közös, ez csak úgy lehetséges, ha a harmadik csúcsuk is egybeesik, ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát az állítást bebizonyítottuk.

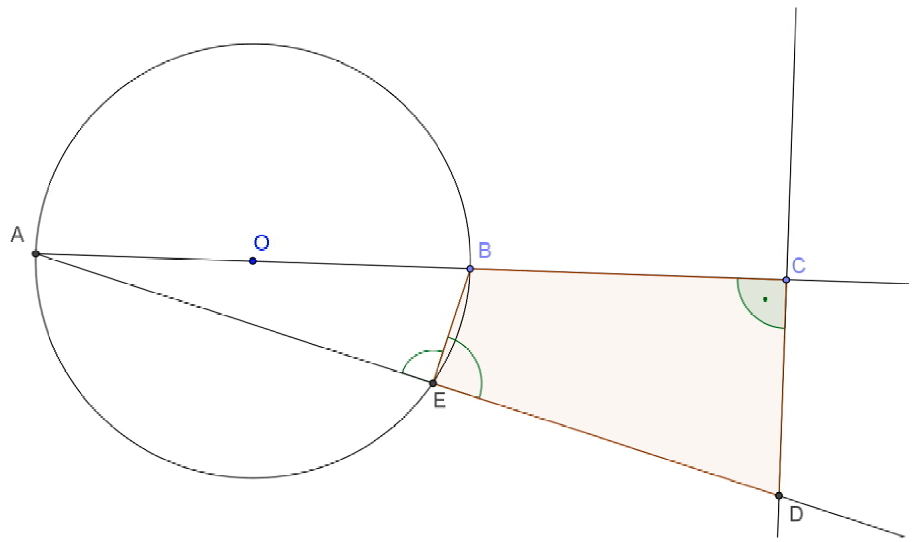
A fordított okoskodás azt jelenti, hogy a bizonyítandó állítás következményéből kiindulva lépésről lépésre haladva visszafelé keressük azt a feltételt, melynek igazsága már könnyen belátható.

Példa

Egy kör AB átmérőjének B-n túl lévő meghosszabbítására C pontjában állítsunk merőlegest. Az A pontból egy másik egyenest húzunk, ami a kört E pontban, a merőlegest D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $BCDE$ húrnégyszög!

Megoldás

Ha a $BCDE$ négyszög húrnégyszög lenne, akkor szemközti szögeinek összege 180° lenne. Tudjuk, hogy a C csúcsnál lévő szöge derékszög, azt kellene tehát belátni, hogy az *E* csúcsnál is derékszög van. Ez akkor teljesülne, ha az *AEB* szög is derékszög lenne. Ez a szög azonban csakugyan derékszög, hiszen az *E* pont rajta van az *AB*szakasz mint átmérő fölé rajzolt körön (Thalesz-tétel) (*15. ábra*).



15. ábra

11.1.7. Számítási feladatok

A számítási feladatoknak két típusát különböztetjük meg: konkrét adatokból (távolságok, szögek) kiindulva megfelelő összefüggéseket felhasználva konkrét eredményt kapunk; csupán betűkkel jelölt adatokból kiindulva algebrai átalakításokkal jutunk el az eredményig.

Példa

Egy *10 cm* sugarú körhöz egy pontból *24 cm* hosszúságú érintők húzhatók. Mekkora az érintési pontokat összekötő húr hossza?

Megoldás

A feladat szövegének megértését egy olyan ábra elkészítése jelenti, melyben szerepelnek az ismert és a keresett adatok. Célszerű az ábrán rögtön rögzíteni azokat az ismereteket is, amelyek a feladat megoldása során felhasználhatók. (*16. ábra*)

Tudjuk, hogy egy adott külső pontból két érintő húzható a körhöz és az érintési szakaszok egyenlők. Tudjuk azt is, hogy az érintési pontokba húzott sugarak merőlegesek az érintőkre, továbbá, hogy a szimmetria miatt a húr merőleges az *OP* szakaszra.

A feladat az *AB* szakasz hosszának meghatározása. Elegendő az *OPA* derékszögű háromszöget vizsgálnunk, mert az *AF* szakasz fele a keresett szakasznak (5). Látható, hogy *AF* az *OPA* derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága. A magasságtétellel ez meghatározható (4), amennyiben ismerjük az *OF* és *FP* szakaszokat. Ezek a befogótétellel számíthatók (2), (3) ha a befogók mellett az átfogót már ismerjük. Az átfogó a Pitagorasz-tétel alapján számítható ki (1).

A számolás lépései:

(1) $OP^2 = 10^2 + 24^2 \Rightarrow OP = 26$

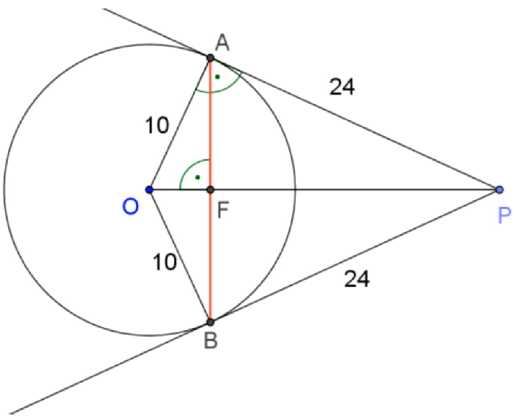
(2) $OF \cdot OP = 10^2 \Rightarrow OF \cdot 26 = 100 \Rightarrow OF = \dfrac{50}{13}$

(3) $FP \cdot OP = 24^2 \Rightarrow FP \cdot 26 = 576 \Rightarrow FP = \dfrac{288}{13}$

(4) $AF^2 = OF \cdot FP = \dfrac{50}{13} \cdot \dfrac{288}{13} \Rightarrow AF = \dfrac{120}{13}$

(5) $AB = 2 \cdot AF = \dfrac{240}{13}$

Tehát az érintési pontokat összekötő húr hossza $\dfrac{240}{13} cm \approx 18{,}46 cm$.



16. ábra

Megjegyzések

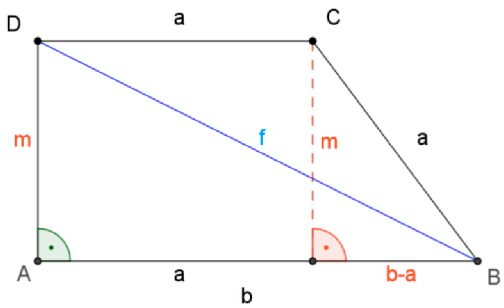
- Amennyiben meggyőződünk arról, hogy a mérőszámok mindegyikéhez ugyanaz a mértékegység tartozik, nem szükséges a számítások során a mértékegységet jelölni, elegendő a megoldás végén, a válaszban feltüntetni.
- A geometriai számításoknál gyakran kapunk eredményül végtelen tizedes törtet. Igyekezzünk a részszámításokat pontos értékekkel végezni, és csak a végeredményt kerekíteni. Példánkban felesleges lett volna az *OF* és *FP* szakaszokat kerekítve tizedestört alakban megadni, hiszen tovább számoltunk velük, s így a következő lépésben a gyökvonás eredménye pontos érték maradt.
- A feladat más módszerekkel, például trigonometriai összefüggésekkel vagy a területképletek alkalmazásával is megoldható.

Példa

Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és hosszabbik szára egyenlő hosszú. Határozzuk meg a hosszabbik átló hosszát, ha a hosszabbik szár a és a hosszabbik alap b!

Megoldás

Elkészítjük a feladat szövegének megfelelő ábrát, megjelölve rajta az ismert (a, b) és a keresett (f) adatokat. A feladat megoldását az jelenti, hogy a keresett szakaszt kifejezzük az adott szakaszokkal. (*17. ábra*)



17. ábra

A megoldás kulcsa a C csúcsból induló m magasság behúzása. Pitagorasz tétele alapján kapjuk, hogy $m^2 = a^2 - (b-a)^2 = 2ab - b^2$.

Az f átlót a rajzon látható másik derékszögű háromszögből határozzuk meg, ugyancsak a Pitagorasz-tételt felhasználva:

$$f^2 = m^2 + b^2 = 2ab - b^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow f = \sqrt{2ab}.$$

Megjegyzések

Előfordul, hogy számítási feladatot bizonyítási feladattá alakítunk, vagy fordítva. Az előbbi feladat átfogalmazása bizonyítási feladattá: „Egy derékszögű trapéz rövidebbik alapja és ferde szára egyenlő hosszú. Bizonyítsuk be, hogy a hosszabbik átló az alapok mértani közepének $\sqrt{2}$-szerese!”.

Egymásra épülő feladatokat kapunk, ha előbb valamilyen összefüggés felfedezéséhez konkrét számítást kérünk (a fenti példa megoldása konkrét hosszúságértékekkel), majd a felfedezett összefüggést általánosan bizonyítjuk.

11.2. Térgeometria

A térgeometriai fogalmak és összefüggések megértéséhez a szemléltetés nélkülözhetetlen. Szemléltetni elsősorban kézbe vehető modellekkel tudunk, de használhatunk háromdimenziós számítógépes animációkat is.

Az alapvető térgeometriai fogalmak és relációk már ismertek a középiskolás tanulók előtt. Ahogyan a síkgeometria tanításánál jeleztük, itt is szükség van a rendszerezésre. Térelemek kölcsönös helyzetének szisztematikus vizsgálata mellett a térelemek távolságát és hajlásszögét is vizsgáljuk. Fontos, hogy a párhuzamosság, merőlegesség fogalmát a térben is értsék a tanulók. A tér- és síkgeometria tanításában sokszor építünk az analógiára. Ahogy a síkgeometriában síkidomokat, sokszögeket és speciális alakzatokat vizsgálunk, a térgeometriában testekkel, poliéderekkel, speciális háromdimenziós alakzatokkal foglalkozunk.

Általános iskolában megismerkednek a tanulók a kocka, a téglatest, a hasáb és a gúla fogalmával. Ezekhez kapcsolódóan találkoznak a lap, az él, a csúcs fogalmakkal. Mindezeket 9-10. évfolyamon kiegészítjük a lapátló, testátló fogalmakkal, valamint a lapok, ill. az élek által bezárt szögek értelmezésével (itt a térelemek hajlásszögének definíciójára támaszkodhatunk).

A középiskola első három évében felszínen tartjuk mindezeket az ismereteket, főként konkrét számítási feladatok segítségével. A térgeometriai ismeretek rendszerezésére és kibővítésére a 12. évfolyamon kerül sor.

Ez a témakör egyben a középiskolában tanult elemi geometriai ismeretek szintetizáló összefoglalása.

A speciális testek közül a körhengerrel, a körkúppal, a csonkagúlával és a csonkakúppal, valamint a gömbbel foglalkozunk bővebben. Lapszögek, élszögek, élek, átlók, testmagasság meghatározása mellett felszín és térfogatszámítási feladatokat végzünk. Ezek a feladatok alkalmat nyújtanak a trigonometriai ismeretek elmélyítéséhez is.

Példa

Egy háromszög alapú gúla minden lapja egy *10 cm* oldalú szabályos háromszög. Határozzuk meg a gúla valamely két lapjának hajlásszögét!

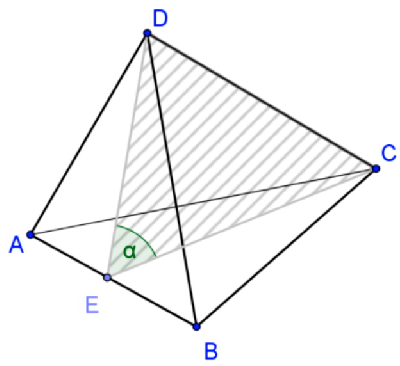
A feladat megoldásához tudnunk kell, hogy mit értünk két lap, pontosabban két metsző sík hajlásszögén.

Definíció

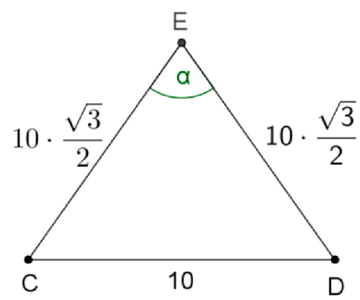
Két metsző sík hajlásszöge a metszésvonal egy tetszőleges pontjából indított két olyan egyenes szögével egyezik meg, melyek közül az egyik az egyik síkban, a másik a másik síkban van, és mindkettő merőleges a síkok metszésvonalára.

Megoldás

A feladatban szereplő gúla lapjai szabályos háromszögek, így a háromszöglapoknak a közös élhez tartozó magasságainak szöge egyenlő a lapok hajlásszögével. (*18. ábra*) Ezt követően a feladat a gúla egy síkmetszetének vizsgálatára egyszerűsödik. (*19. ábra*)



18. ábra



19. ábra

Az ECD háromszög egyik oldala *10 cm*, a másik kettő pedig a *10 cm* oldalú szabályos háromszög magassága, melyről tudjuk, hogy az $10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ *cm.*

Keressük az ECD egyenlő szárú háromszög α szárszögét. A koszinusz tételt alkalmazva:

$$10^2 = \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 70{,}53^0.$$

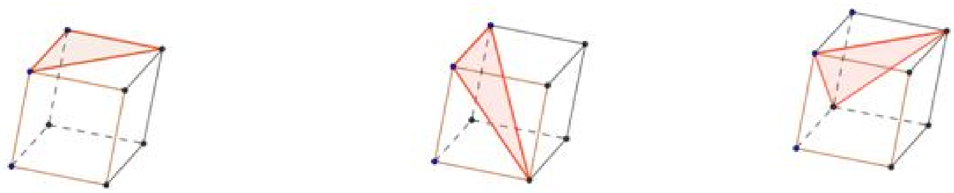
A térszemléletet fejleszti, ha a térbeli alakzatok lehetséges elhelyezkedését kombinatorikus gondolatmenettel határozzuk meg.

Példa

Hányféleképpen tudunk kiválasztani a kocka nyolc csúcsa közül hármat úgy, hogy az ezeken átfektetett sík ne menjen át egy negyedik csúcsponton?

Megoldás

A kocka két csúcsát összekötő szakasz háromféle lehet: él, lapátló, testátló. A három csúcs egy háromszöget határoz meg, melynek oldalai a következők lehetnek (*20. ábra*):



(1) 2 él és 1 lapátló (2) 1 él, 1 lapátló és 1 testátló (3) 3 lapátló

20. ábra

Az (1) esetben a három csúcs egy lapon van, így azon rajta van a kocka negyedik csúcsa is. A (2) esetben a három csúcs a kocka átlósíkján van, ezen ugyancsak rajta van egy negyedik csúcs. A (3) esetben a háromszög síkján nem megy át további csúcs. Ezt a háromszöget úgy kapjuk meg, hogy kiválasztjuk az ugyanazon csúccsal szomszédos három csúcsot. Mivel a kockának nyolc csúcsa van, ezt 8-féleképpen tehetjük meg, amennyiben a kocka csúcsait különbözőnek tekintjük.

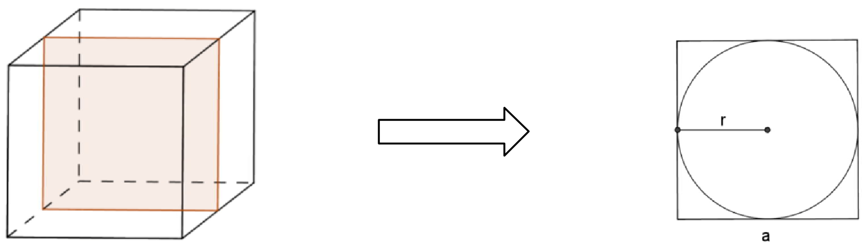
Sok esetben okoz nehézséget a mindennapi életből vett feladatban a térgeometriai összefüggések meglátása, elsősorban a térszemlélet fejletlensége miatt. Lényeges feladat az is, hogy megtanítsuk a tanulókat jó térbeli ábra készítésére. Kezdetben célszerű a rajzon és a modellen párhuzamosan dolgozni. Testek síkmetszetének, beírt vagy körülírt gömbjének elképzelése ugyancsak nehézséget okozhat. Ehhez a modelleken kívül szükség esetén számítógépes alkalmazásokkal is szemléltessük a problémákat.

Példa

Egy kocka alakú fadarabból kifaragunk egy lehető legnagyobb sugarú gömböt. A fadarab hány százaléka lesz hulladék?

Megoldás

A feladat a kocka és a kockába írható gömb térfogatának összehasonlítása. A kockába írható gömb sugara megegyezik főkörének a sugarával. Ilyen kört kapunk, ha a kockát párhuzamos éleinek felezési pontjaira illeszkedő síkkal elmetsszük. (*21. ábra*)



21. ábra

Az ábráról jól látható, hogy a főkör sugara a kocka élének fele.

A hulladék térfogata:

$$V_{hulladék} = V_{kocka} - V_{gömb} = a^3 - \frac{4 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = a^3 \cdot \frac{6-\pi}{6}$$

A hulladék térfogata tehát a kocka térfogatának $\frac{V_{hulladék}}{V_{kocka}} = \frac{6-\pi}{6}$-od része, ami kb. *47,7%*.

11.3. Geometriai transzformációk

A geometriai transzformációkat ponthalmazhoz ponthalmazt rendelő, kölcsönösen egyértelmű függvényeknek tekintjük. Definiálásukhoz tehát a két ponthalmaz megadásán túl a függvény hozzárendelési szabályának megadása szükséges. Középiskolában csak olyan transzformációkkal foglalkozunk, melyek értelmezési tartománya és értékkészlete is ugyanannak a síknak a pontjaiból áll. Az általános iskolában a tanulók megismerkednek a tengelyes és a középpontos tükrözéssel, az eltolással, valamint a hasonlósággal. A hangsúly ott az alakzat és képének összehasonlításán, bizonyos megmaradó tulajdonságok felismerésén van. Középiskolában a geometriai transzformációk rendszerezése, egységes tárgyalása, a transzformációs szemlélet erősítése kerül előtérbe.

Az egyes transzformációk tanításának algoritmusa hasonló. Először definiáljuk a pontfüggvényt: rögzítjük a leképezéshez szükséges adatokat, megadjuk a hozzárendelési szabályt. Ezt követően eljárást adunk a sík tetszőleges pontjához tartozó képpont megszerkesztésére. A transzformációs tulajdonságok megállapítása után a megismert transzformációt elhelyezzük a transzformációk rendszerében.

11.3.1. Egybevágósági transzformációk

9. évfolyamon a sík egybevágósági transzformációival foglalkozunk. Ezek a tengelyes tükrözés, a pont körüli forgatás és az eltolás. Beszélünk az identikus leképezésről (helybenhagyás) is.

Definíció

Legyen adott a síkon egy *t* egyenes. A *t* <u>*tengelyre vonatkozó tükrözés*</u> a sík egy tetszőleges *P* pontjához azt a *P’* pontot rendeli, amelyre teljesül, hogy

ha a *P* pont illeszkedik a *t* egyenesre, akkor képe önmaga, azaz *P’*=*P*.

ha a *P* pont nem illeszkedik a *t* egyenesre, akkor képe az a *P’* pont a síkon, melyre fennáll, hogy a *PP’* szakasz felezőmerőlegese a *t* egyenes.

Definíció

Legyen adott egy $\vec{v}$ vektor. Az <u>eltolás</u> a sík tetszőleges *P* pontjához azt a *P'* pontot rendeli, melyre teljesül, hogy a $\overrightarrow{PP'}$ vektor egyenlő a $\vec{v}$ vektorral.

Megjegyzés

A vektort mint irányított szakaszt célszerű az eltolás előtt bevezetni. Van olyan tárgyalásmód is, amely éppen az eltoláson keresztül definiálja a vektor fogalmát.

Definíció

Legyen adott a síkon egy *O* pont és egy α irányított szög. Az <u>*O* pont körüli α</u> irányított szöggel való <u>*forgatás*</u> a sík egy tetszőleges *P* pontjához azt a *P'* pontot rendeli, melyre teljesül, hogy

ha a *P* pont egybeesik *O*-val, akkor képe önmaga, azaz *P'=P*.

ha a *P* pont nem esik egybe *O*-val, akkor képe az a *P'* pont, melyre fennáll, hogy *OP'=OP* és a *POP'* irányított szög megegyezik az α szöggel.

Definíció

Ha a pont körüli forgatás szöge *180°*, akkor <u>*középpontos tükrözésről*</u> beszélünk.

A fenti definíciók szerkezete azonos, mindegyik a transzformáció elvégzéséhez szükséges elemek rögzítésével kezdődik, majd eljárást ad a sík tetszőleges pontjához a képpont meghatározására. A definíciók nem statikusak abban az értelemben, hogy a képpontok definiálásához magukat a képpontokat is felhasználják. A leírtak alapján minden ponthoz egy és csak egy képpont rendelhető. Ezt középiskolában nem bizonyítjuk, de a definíciók értelmezéséből kiolvasható szerkesztési eljárásból és az előzetes síkgeometriai ismeretekből ez egyértelműen következik.

Transzformációs tulajdonságok

A definiált geometriai transzformációk esetében tudatosítjuk a megmaradó és esetlegesen a változó tulajdonságokat. Ehhez nem elegendő egy pont képét meghatározni, célszerű háromszögek és más sokszögek képét megszerkesztve keresni az invariáns tulajdonságokat. A felfedezett tulajdonságokat nem bizonyítjuk, a szemléletre támaszkodva fogadjuk el.

Mindegyik esetben vizsgáljuk a távolság-, a szög- és az iránytartás kérdését. Lehet további tulajdonságokat (illeszkedéstartás, egyenestartás, párhuzamostartás, körtartás stb.) is keresni, azonban ezek a középiskolában tárgyalásra kerülő transzformációk mindegyikénél teljesülnek, így a tanulókban fel sem merül esetleges megváltozásuk.

A fixpontok, fixalakzatok, invariáns alakzatok megállapítása ugyancsak hozzátartozik a transzformációk jellemzéséhez.

Megjegyzés

Fontos tudatosítani, hogy a távolságtartás szakasz és képének egyenlő hosszúságát jelenti, a szögtartás pedig szög és képének egyenlőségét.

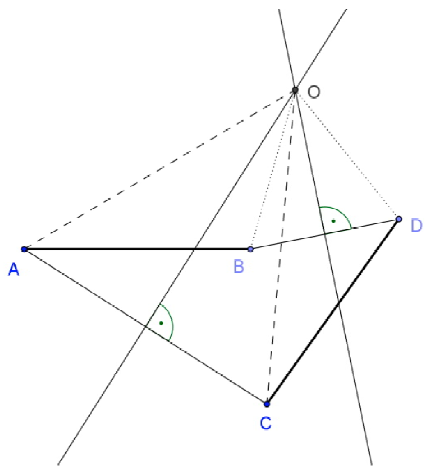
Az egyes transzformációk mélyebb megértését szolgálják azok a szerkesztési feladatok, amelyekben két alakzat ismeretében keressük azt a transzformációt, amely egyiket a másikba viszi át.

Példa

Rajzoljunk fel két egyenlő (de nem párhuzamos) szakaszt. Szerkeszszünk pontot, amely körül a két szakasz egymásba forgatható!

Megoldás

A pont körüli forgatás definíciójából következik, hogy a forgatás keresett középpontja illeszkedik a pont és a képpont által meghatározott szakasz felezőmerőlegesére. Így a forgatás középpontja vagy az *AC* és a *BD* szakaszok felezőmerőlegesének, vagy az *AD* és a *BC* szakaszok felezőmerőlegesének közös pontja lehet. (Ezek a pontok léteznek, mert az *AB* és az *CD* szakaszok nem párhuzamosak.) (*22. ábra*).



22. ábra

A *22. ábrán* lévő *O* pont valóban egy középpontos forgatás centruma, mert az *ABO* és a *COD* háromszögek megfelelő oldalainak egyenlősége miatt az *AOB* és a *COD* szögek egyenlők, amiből az *AOC* és a *BOD* irányított szögek egyenlősége is következik.(Amennyiben az *AB* és a *CD* szakasz úgy metszi egymást, hogy a fenti két felezőmerőleges egybeesik, a forgarás középpontja ez a metszéspont lesz.).

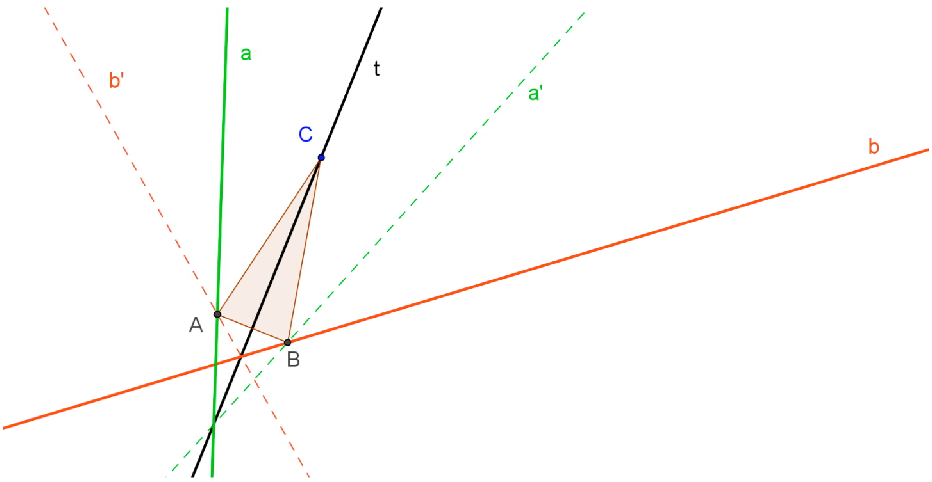
A tanult egybevágósági transzformációkat gyakran használjuk fel szerkesztési feladatok megoldásához.

Példa

Szerkesszünk egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szimmetriatengelye, az azon lévő csúcs, továbbá a másik két csúcson átmenő egy-egy egyenes.

Megoldás

Legyen adott a *t* tengely, rajta a *C* pont, továbbá az *a* és a *b* egyenesek.A szerkesztendő *A* és *B* pontokról tudjuk, hogy egymás tükörképei a *t* szimmetriatengelyre nézve. Az *A* pont rajta van az *a* egyenesen, így tükörképe, a *B* pont rajta van az *a* egyenes *a'* tükörképén, mert a tengelyes tükrözés illeszkedéstartó transzformáció. Tehát a *B* pont csak az *a'* és a *b* egyenesek metszéspontja lehet, amennyiben létezik. A *B* pontot a *t* tengelyre tükrözve kapjuk *A*-t, amely illeszkedik *a*-ra. (*23. ábra*)

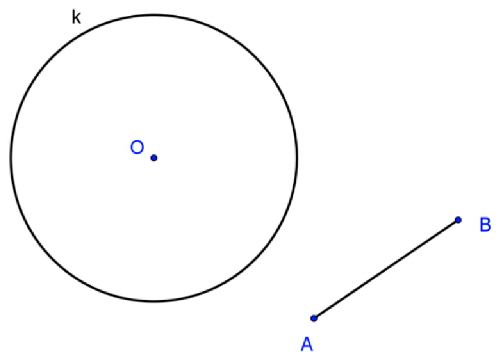


23. ábra

Diszkusszió: Mivel a háromszög *B* csúcsa két egyenes metszéspontjaként áll elő, a megoldások száma a *b* és az *a'* egyenesek kölcsönös helyzetétől függ. Ha egybeesnek, azaz ha *a* és *b* azonos szögben, ugyanabban a pontban metszi a tengelyt, akkor végtelen sok megoldást kapunk. Ha párhuzamosak, azaz *a* és *b* azonos szögben de különböző pontokban metszi a tengelyt, akkor nincs megoldás. Minden egyéb esetben pontosan egy megoldás van.

Példa

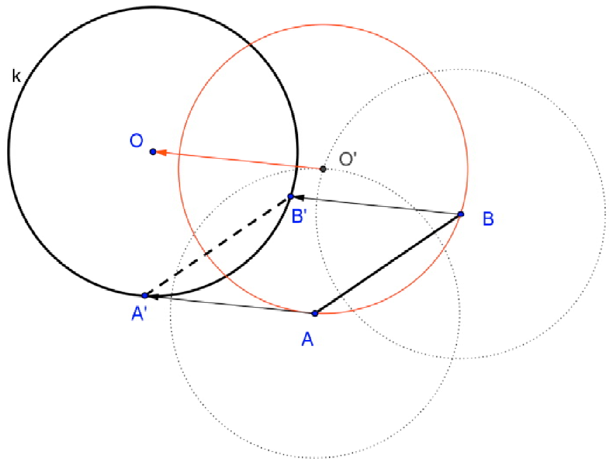
Szerkessze meg a *k* körnek egy olyan húrját, amelyik az *AB* szakasszal párhuzamos! (*24. ábra*)



24. ábra

Megoldás

Az eltolás távolságtartó transzformáció, így a *k* kör képe egy vele azonos sugarú kör. Ezt felhasználva megszerkesztjük az *AB* húrhoz tartozó *O'* középpontú kört. (*25. ábra*)



25. ábra

Az AB szakaszt az $\overrightarrow{O'O}$ vektorral eltolva kapjuk a keresett $A'B'$ szakaszt, mely AB-vel párhuzamos és végpontjai illeszkednek a k körre az eltolás illeszkedés- és párhuzamostartó tulajdonságából következően.

Megjegyzés

Ha a feladathoz megadunk egy konkrét ábrát, melyen feltüntetjük az adatokat, a szerkesztést követő diszkusszióra nincs szükség.

11.3.2. Hasonlósági transzformációk

Az egybevágósági transzformációkhoz hasonlóan vezetjük be 10. évfolyamon a középpontos hasonlósági transzformációt, majd a hasonlósági transzformációt.

Definíció

Legyen adott a síkon egy O pont és egy $\lambda \neq 0$ valós szám. Az O ponthoz tartozó λ arányú <u>*középpontos hasonlóság*</u> a sík tetszőleges P pontjához azt a P' pontot rendeli, melyre teljesül, hogy

ha a P pont egybeesik O-val, akkor képe önmaga, azaz $P'=P$.

ha a P pont nem esik egybe O-val, akkor képe az OP egyenesnek az a P' pontja, melyre fennáll, hogy $\frac{OP'}{OP} = |\lambda|$. Ha $\lambda > 0$, akkor a P' pont az

OP félegyenesen van, ha $\lambda < 0$, akkor a *P* és *P'* pontokat az *O* pont elválasztja.

Definíció
Hasonlósági transzformáción egy középpontos hasonlósági és egy egybevágósági transzformáció szorzatát értjük.

A hasonlósági transzformációkat osztályozzuk a λ arányszám lehetséges értékei szerint. Ez lehetőséget ad arra, hogy egyrészt kapcsolatot teremtsünk az általános iskolában már tanult nagyítással ($|\lambda| > 1$) és kicsinyítéssel ($0 < |\lambda| < 1$), másrészt arra is, hogy az egybevágósági transzformációkat a hasonlósági transzformációk speciális esetének tekintsük ($\lambda = 1; -1$).

A transzformációs tulajdonságok egy része (szögtartás, illeszkedéstartás, egyenestartás) megegyezik az egybevágósági transzformációk tulajdonságaival, ugyanakkor a távolságtartás helyébe annál általánosabb, az aránytartás lép. Ennek a tulajdonságnak a következménye, hogy az alakzatok kerülete, területe, felszíne és térfogata a hasonlósági transzformáció nyomán megváltozik.

11.3.3. Egybevágó síkidomok

Definíció
Két alakzatot akkor nevezünk *egybevágónak*, ha van olyan egybevágósági transzformáció, mely az egyiket a másikba viszi át.

A definícióból és az egybevágósági transzformáció tulajdonságaiból következik, hogy egybevágó sokszögek megfelelő oldalai és szögei egyenlők.

A háromszögek egybevágóságának megállapításához nem szükséges minden megfelelő oldal és szög egyenlőségét megmutatni, mert azt a négy feltétel (egybevágósági alapesetek) közül bármelyiknek a teljesülése biztosítja.

Tétel: (a háromszög egybevágósági alapesetei)
Két háromszög egybevágó akkor és csak akkor, ha az alábbi négy feltétel egyike teljesül:
(1) Oldalaik páronként megegyeznek.
(2) Egy-egy oldaluk és az azokon fekvő szögek páronként megegyeznek.

(3) Két-két oldaluk és az azok által közbezárt szögek megegyeznek.

(4) Két-két oldaluk és a nagyobbikkal szemközti szögek megegyeznek.

Középiskolában ezeket a bizonyításokat nem végezzük el, segíti azonban az egybevágóság fogalmának megértését, ha szemléltetjük a két háromszög fedésbe hozatalát geometriai szerkesztőprogrammal, vagy papírból kivágott alakzatokkal.

Definíció

Egy síkidomot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha van olyan, az identitástól különböző egybevágósági transzformáció, amelyre nézve a síkidom képe önmaga. Az egybevágósági transzformáció fajtáinak megfelelően beszélünk tengelyes vagy forgásszimmetriáról, ezen belül középpontos szimmetriáról.

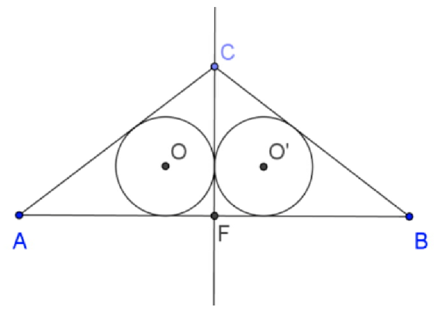
Az egybevágóságot szerkesztési, bizonyítási és számítási feladatok megoldásánál egyaránt felhasználjuk.

Példa

Egyenlő szárú háromszögbe szerkesszünk két egyenlő sugarú kört úgy, hogy azok egymást, az alapot és egy-egy szárat is érintsenek!

Megoldás

Az egyenlő szárú háromszöget szimmetriatengelye két egybevágó háromszögre bontja. Elegendő az egyik ilyen háromszög beírt körét megszerkeszteni, majd tükrözni a szimmetriatengelyre, hogy megkapjuk a két keresett egybevágó kört. (*26. ábra*)



26. ábra

Példa

Mutassuk meg, hogy ha két háromszög megfelelő középvonalai egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó!

Megoldás

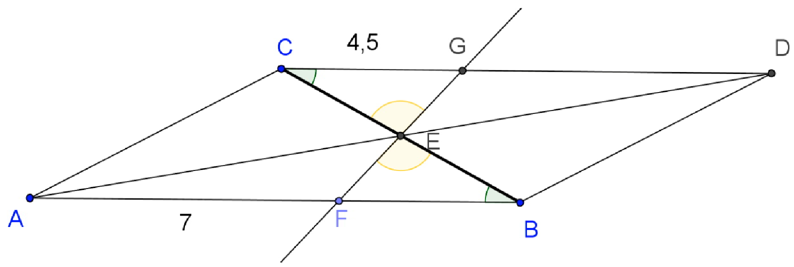
A középvonal kétszerese a hozzá tartozó oldalnak. Így a megfelelő középvonalak egyenlőségéből a megfelelő oldalak egyenlősége következik, ami az egyik egybevágósági alapeset.

Példa

Az *ABCD* paralelogramma átlóinak metszéspontján átmenő egyenes az *AB* oldalból egy *7 cm*-es, a *CD* oldalból egy *4,5 cm*-es darabot metsz le. Mekkora az *AB* oldal?

Megoldás

Belátjuk, hogy az *FBE* és az *CEG* háromszögek egybevágók: A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért *CE=EB*. A paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak, ezért a *B* és a *C* csúcsnál lévő szögek váltószögpárt alkotnak, a *CEG* és az *FEB* szögek pedig csúcsszögek. Tehát a két háromszögben megegyezik egy-egy oldal és az azokon fekvő két szög. (*27. ábra*)



27. ábra

Az egybevágóságból következik, hogy a másik két oldal is páronként egyenlő, *FB=4,5 cm*. Az *AB* oldal hossza ezért *11,5 cm*.

11.3.4. Hasonló síkidomok

Az egybevágó síkidomok tanításával analóg módon tanítjuk 10. évfolyamon a hasonló alakzatokat.

Definíció

Két síkidomot hasonlónak nevezünk, ha létezik olyan hasonlósági transzformáció, mely egyiket a másikba viszi át.

A háromszögek hasonlóságának alapeseteit az egybevágósági alapesetekkel párhuzamba állítva tárgyaljuk.

Tétel (a háromszög hasonlósági alapesetei)

Két háromszög hasonló akkor és csak akkor, ha az alábbi négy feltétel egyike teljesül:

(1) Oldalaik aránya páronként megegyezik.

(2) Két-két szögük megegyezik.

(3) Két-két oldaluk aránya és az azok által közbezárt szögek megegyeznek.

(4) Két-két oldaluk aránya és a nagyobbikkal szemközti szögek megegyeznek.

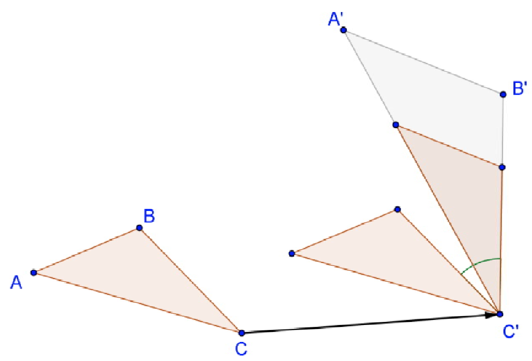
Itt is a szemléletre és az analógiára hivatkozunk, de hasznos, ha legalább egy esetben a transzformációk bemutatásával alátámasztjuk állításainkat.

Példa

Mutassuk meg, hogy két háromszög hasonló, ha megegyeznek megfelelő szögeik!

Megoldás

Induljunk ki két, tetszőleges helyzetű *ABC* és *A'B'C'* háromszögből, melyek szögei páronként megegyeznek. (*28. ábra*)



28. ábra

Ha az *ABC* háromszöget eltoljuk a *CC'* vektorral úgy, hogy *C*=*C'*, majd *C'* körül elforgatjuk egy akkora szöggel, hogy a *B* csúcs képe a *C'B'* egyenesre essen. A szögek egyenlőségéből következik, hogy az *A* csúcs képe a *C'A'* egyenesre kerül. A másik két szögpár egyenlősége biztosítja a két háromszög *C'*-vel szemközti oldalának párhuzamosságát, ami a párhuzamos szelők tétele szerint a megfelelő oldalak arányának megegyezéséhez vezet. Eszerint az arány szerint elvégezve a középpontos hasonlósági transzformációt, az eredeti *A'B'C'* háromszöget kapjuk.

Megjegyzések

- Példánkban a két kiindulási háromszög körüljárási iránya megegyezett. Ha ellentétes lett volna, akkor még egy tengelyes tükrözést is végre kellett volna hajtani.
- A párhuzamos szelők tétele nem szerepel a középszintű tananyagban, így a fenti bizonyítás helyett meg kell elégednünk a szemléltetéssel, amely dinamikus geometriai szerkesztőprogram segítségével könnyen elvégezhető.

Hasonlóságon alapuló szerkesztési feladatok lényege, hogy első lépésben a keresett alakzathoz hasonlót szerkesztünk, majd a kapott alakzaton hasonlósági transzformációt végzünk, figyelembe véve az ismert adatokat.

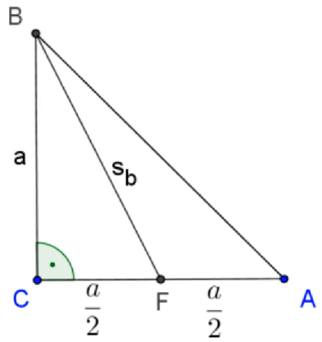
Példa

Szerkesszünk egyenlőszárú derékszögű háromszöget, ha ismert az egyik szárhoz tartozó súlyvonal hossza!

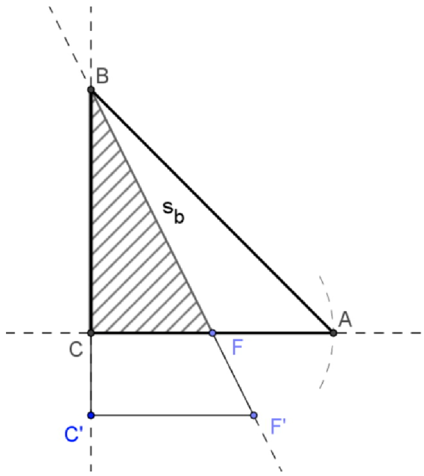
Megoldás

A vázlaton látszik, hogy az *FBC* derékszögű háromszög megszerkesztése a megoldás kulcsa.*(29. ábra*)

Ebben a derékszögű háromszögben ismerjük a két befogó arányát (2:1), ami azt jelenti, hogy tudunk szerkeszteni egy tetszőleges, ehhez hasonló háromszöget (3. hasonlósági alapeset). Ezt követően a kapott *C'F'B* háromszögre a *B* csúcsból középpontos hasonlósági transzformációt alkalmazunk úgy, hogy az átfogó az adott súlyvonallal egyezzen meg, majd a *C* csúcsot *F*-re tükrözve megkapjuk a keresett háromszög hiányzó *A* csúcsát. (*30. ábra*)



29. ábra



30. ábra

A feladatnak az s_b szakasz hosszától függetlenül mindig egy megoldása van.

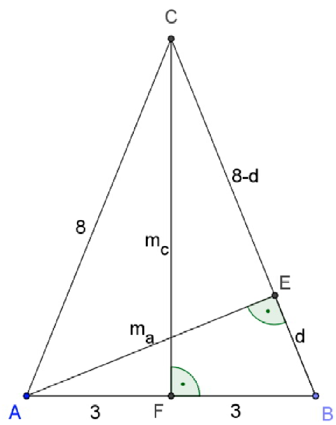
A háromszögek hasonlóságát számítási és bizonyítási feladatok megoldásában általában úgy tudjuk felhasználni, hogy hasonló háromszögeket keresünk a négy hasonlósági alapeset egyike alapján, majd a hasonló háromszögekre felírjuk valamelyik másik alapeset feltételét.

Példa

Egy egyenlő szárú háromszög alapja *6 cm*, szárai *8 cm* hosszúak. Mekkora részekre bontja a szárakat a hozzájuk tartozó magasság?

Megoldás

Ábrát készítünk. (*31. ábra)*



31. ábra

Az *ABE* és az *FBC* háromszögek hasonlók, mivel két-két szögük megegyezik: egy-egy szög derékszög, a *B* csúcsnál lévő szög pedig közös. Így megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$\frac{6}{8} = \frac{d}{3} \Rightarrow d = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

Tehát a szárat a magasság *2,25 cm*-es és *5,75 c*m-es részekre bontja.

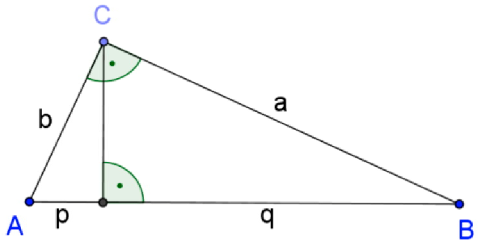
A háromszögek hasonlóságán igen sok geometriai tétel alapul. Ezek közül középszinten a derékszögű háromszögekre vonatkozó magasság- és befogótételt tanítjuk, de ebbe a témakörbe tartoznak a körhöz húzott érintő és szelőszakaszokra vonatkozó arányossági tételek is.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy derékszögű háromszögben a befogók négyzeteinek aránya megegyezik a befogók átlóra eső merőleges vetületeinek arányával!

Megoldás

A *32. ábra* jelöléseit használjuk.



32. ábra

A befogótétel szerint: $b^2 = p \cdot c$ és $a^2 = q \cdot c$.

A befogók négyzeteinek aránya: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{p \cdot c}{q \cdot c} = \frac{p}{q}$, ami a bizonyítandó volt.

Példa

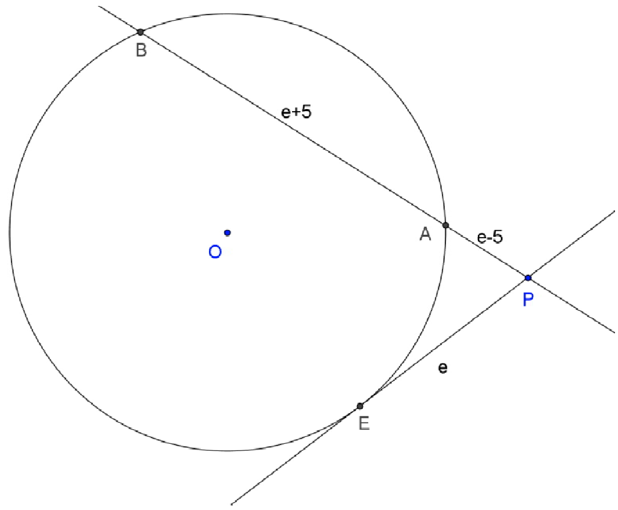
A körhöz a P pontból húzott szelő a kört A-ban és B-ben metszi. PA *5 cm*-rel rövidebb, AB pedig *5 cm*-rel hosszabb, mint a P-ből a körhöz húzott érintőszakasz. Mekkora ez az érintő?

Megoldás

A körhöz húzott szelő- és érintőszakaszok tétele szerint:

$EP^2 = AP \cdot BP \Rightarrow e^2 = (e-5) \cdot 2e \Rightarrow e = 10$

Tehát az érintőszakasz hossza *10cm*. (*33. ábra*)



33. ábra

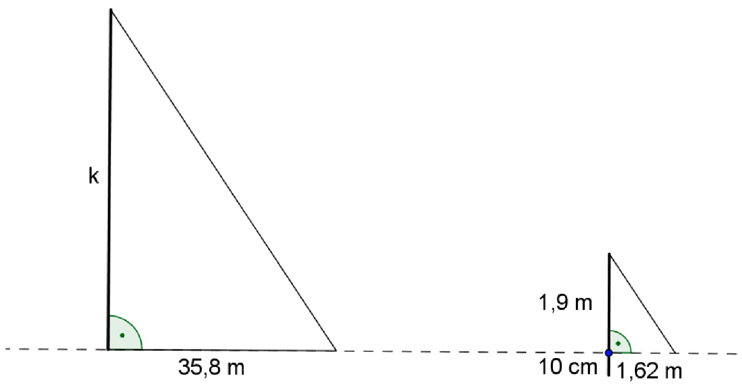
A hasonlóság gyakorlati alkalmazása, azaz a matematikán kívüli problémák geometriai modellezése fontos szerepet kap a tananyagban. Tervrajzok, térképek készítése, olvasása egyaránt igényli a hasonlóság ismeretét. Ugyancsak hasznosak azok a feladatok, amelyekben közvetlenül nehezen mérhető távolságokat a hasonlóság alkalmazásával határozhatunk meg.

Példa

Egy gyárkémény árnyéka *35,8 m*. Ugyanakkor a merőlegesen, *10 cm* mélyen földbe szúrt *2 m* hosszú karónak az árnyéka *1,62 cm*. Határozzuk meg a gyárkémény magasságát!

Megoldás

A gyárkémény, ill. a karó az árnyákával egy-egy derékszögű háromszöget határoz meg. (*34. ábra*)



34. ábra

Ennek a két háromszögnek a szögei egyállásúak, mert az átfogók, amelyek a Nap sugarai által meghatározott egyeneseken vannak, párhuzamosak. A szögek egyenlőségéből a háromszögek hasonlósága következik, amiből pedig a megfelelő oldalak arányának egyenlősége:

$$\frac{k}{1{,}9}=\frac{35{,}8}{1{,}62}\Rightarrow k\approx 42\,.$$

Tehát a gyárkémény magassága ≈42 m.

Hasonló alakzatok kerületének, területének, felszínének, térfogatának kiszámítása egyaránt segíti a hasonlóság gyakorlati alkalmazását és a fogalmak elmélyítését.

Példa

Egy területet egybevágó mozaiklapokkal szándékozunk burkolni. A tervezett lapokból *240* darab kellene. Helyette ugyanolyan alakú *1,5-ször* nagyobb, vagy *0,8-szor* kisebb hosszméretű lapokat vásárolhatunk. Hány darabot kell vennünk az egyik vagy a másik fajtából? (A burkolásnál keletkező hulladékkal nem számolunk.)

Megoldás

A hasonló síkidomok területei a hasonlóság arányának négyzetével arányosak. Példánkban a hasonlóság aránya az első esetben *1,5*, a másodikban *0,8*. A mozaiklapok darabszáma területüktől függ, így az első esetben $\frac{240}{1{,}5^2} \approx 106{,}7$, azaz *107* db, a második esetben pedig $\frac{240}{0{,}8^2} = 375$ db szükséges.

Példa

Tekintsük a meggyet és magját is gömbnek! A meggymagot olyan vastagon veszi körül a gyümölcs húsa, mint amennyi a mag átmérője. Hányszorosa a hús térfogata a magénak?

Megoldás

A meggy sugara a mag sugarának *3-szorosa*. Mivel bármely két gömb hasonló egymáshoz, a meggy térfogata *27-szerese* a mag térfogatáénak. A gyümölcshús térfogata a meggy és a mag térfogatának különbsége, azaz *26-szorosa* a mag térfogatának.

11.4. Geometriai mérések

Geometriai méréseken a hosszúságmérést, a hosszúságból származtatott mennyiségek (kerület, terület, felszín, térfogat) mérését, valamint a szögmérést értjük.

11.4.1. A hosszúság, a kerület, a terület, a felszín és a térfogat

A hosszúság, a kerület, a terület, a felszín és a térfogat szemléletes fogalma már az általános iskolából ismert. A középiskolában ezek definiálására is sor kerül.

Az axiómákból következik, hogy ha egy szakaszt hosszegységnek választunk, akkor minden szakaszhoz egyértelműen hozzárendelhető egy nem negatív valós szám, amely megmutatja, hogy az adott szakasz hossza hányszorosa az egységül választott szakasznak.

Definíció
Két pont távolságán a két pontot összekötő szakasz hosszát értjük.

Definíció
Két ponthalmaz távolságán a két ponthalmaz pontjait összekötő szakaszok közül a legrövidebb szakasz hosszát értjük.

Látható tehát, hogy a távolság fogalmát visszavezetjük két pont távolságára, azaz szakasz hosszára. Ennek értelmében tudunk beszélni egymástól 0 távolságra lévő ponthalmazokról is, azaz olyanokról, amelyeknek van legalább egy közös pontja.

A kerület fogalmát elsősorban egyszerű sokszögekhez kötjük, s a sokszög oldalai hosszának összegét értjük rajta. A kör és más síkidomok kerületének értelmezésénél megmaradunk annál a szemléletes képnél, hogy az a határoló görbe hossza, nem jutunk el az ívhossz, így a határérték fogalmához.

A síkidom területét is szemléletesen értelmezzük, azaz egybevágó síkidomok egyrétegű és hézagmentes lefedését kötjük hozzá a fogalomhoz. 12. évfolyamon jutunk el a definícióhoz.

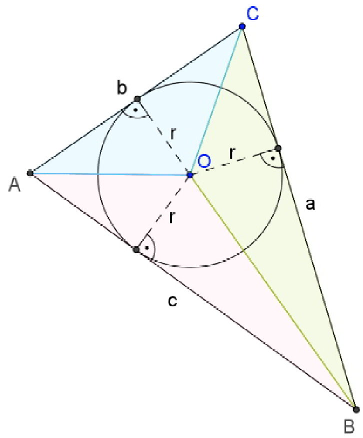
Definíció
Minden síkidomhoz egyértelműen hozzárendeljük azt a pozitív valós számot, melyet a síkidom *területének* nevezünk, és amelyre teljesülnek a következő feltételek:

(1) egybevágó síkidomokhoz ugyanazt a valós számot rendeljük;
(2) ha egy síkidomot véges sok részsíkidomokra bontunk, akkor a részekhez rendelt valós számok összege megegyezik az eredeti síkidomhoz rendelt valós számmal;
(3) az egységnyi oldalú négyzethez *1*-et rendelünk.

A fenti definíció jól foglalja össze mindazokat a tevékenységeket, melyeket a területméréshez kötődően a korábbi években végeznek a tanulók: az egybevágó síkidomokkal való hézagmentes és egyrétegű lefedéseket és a sokszögeke átdarabolását. Általános iskolában az egységnégyzet területének ismeretében a téglalap, majd átdarabolás után a paralelogramma, a háromszög, a trapéz, a rombusz és a deltoid területének kiszámítási módját (területképletét) adjuk meg. Ezeket alkalmazva elegendő szakaszok hosszát megmérni (oldalak, átlók, magasságok) a területet már nem méréssel, hanem számítással kapjuk.

A kör területképletét ugyancsak „téglalappá” átdarabolással alkotjuk meg. Ez az átdarabolás természetesen csak közelítés, de jól szemléltethető vele a képlet.

A 9. évfolyamon törekszünk arra, hogy a terület fogalma ne csak egy képlethez kötődjön, ezért foglalkozunk a háromszög $T = \frac{a \cdot m_a}{2}$ alap-területképletén túl továbbiakkal is, pl. a beírt kör sugarát felhasználó $T = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$ képlettel, amely a háromszög három kisebb háromszögre vágásával és az alapképlet alkalmazásával kapható meg. (*35. ábra*)



35. ábra

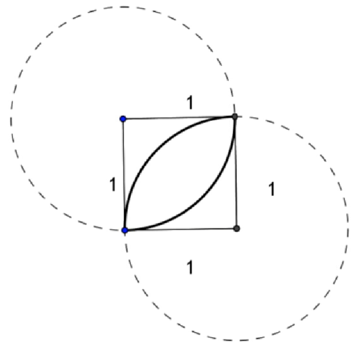
Ugyancsak a 9. évfolyamon tanítjuk a kör részei: a körcikk, a körszelet és a körgyűrű területének meghatározási módját. Mindegyik esetben a terület szemléletes képét, annak additív tulajdonságát használjuk fel a kiszámítási képletek megalkotásához.

Példa

Az egységnyi oldalú négyzetbe írjunk két, egységnyi sugarú, negyedkört úgy, hogy középpontjuk a négyzet két szemközti csúcsa legyen! Határozzuk meg a negyedkörívek által közrezárt területet!

Megoldás

A két negyedkörív a négyzetet 3 részsíkidomra bontja. (*36. ábra*)



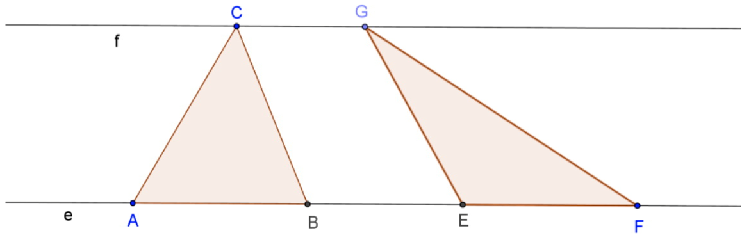
36. ábra

A részek közül kettő egybevágó, területük a négyzet és a negyedkörív területének különbsége: $1^2 - \frac{1^2 \cdot \pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$. A keresett középső rész területét megkapjuk, ha a négyzet területéből kivonjuk a fenti két rész területét: $t = 1 - 2 \cdot \frac{4-\pi}{4} = \frac{\pi - 2}{2} \approx 0{,}57$, azaz a negyedkörívek által közrezárt terület a négyzet területének közel fele.

A területfogalom mélyebb megértéséhez fontos, hogy a tanulók tisztában legyenek a terület megmaradással is, azaz fogadják el, hogy nem csupán egybevágó síkidomok területe lehet egyenlő.

Példa

Határozza meg a *37. ábra* alapján, hogy melyik háromszög területe nagyobb, ha tudjuk, hogy az *e* és *f* egyenesek párhuzamosak, továbbá *AB=EF= 4 cm*!



37. ábra

Megjegyzés

A tanulók gyakran gondolják, hogy a nagyobb kerületű sokszögnek a területe is nagyobb.

Ez a hibás analógia csak sok, a fentihez hasonló feladaton keresztül szüntethető meg. Segít az is, ha a vizsgált sokszögeket egymásba, vagy azonos oldalú téglalapokká daraboljuk.

10. évfolyamon a hasonló alakzatok területének vizsgálatával, majd a trigonometria eszközeinek megismerésével további területképletek felhasználásával mélyítjük a fogalmat. (Lásd *Trigonometria* fejezet.)

A felszín- és térfogatszámítás a térgeometria témakörén belül kerül tárgyalásra. Az általános iskolában megismert szemléletes fogalmakra építve, újabb speciális testeket megismerve jutunk el 12. évfolyamon a henger, kúp, csonkagúla, csonkakúp és a gömb felszín-, valamint térfogatképleteihez.

Testek felszínén a határoló felület területét értjük. Meghatározása azon testek esetén egyszerűbb, melyek síkba kiteríthetők. A felszín meghatározásához segítséget nyújt poliédereknél a testháló, kúpoknál, csonkakúpoknál a palást fogalmának bevezetése. Mindegyik esetben célszerű papírból elkészíteni a testeket. A gömb felszínének meghatározását többféle szemléletes képhez, intuícióhoz köthetjük, vagy egyszerűen közölhetjük a felszínképletet. A forgástestek felszínének integrálással történő meghatározása adhat magyarázatot minderre, ám ez csak emelt szinten szerepel a tananyagban.

A térfogat fogalmát a területhez analóg módon építjük fel. A szemléletes képet az egybevágó testekkel való hézagmentes kitöltés jelenti, a pontos definíciót 12. évfolyamon adjuk meg.

Definíció

Minden testhez egyértelműen hozzárendeljükazt pozitív valós számot, melyet a test <u>*térfogatának*</u> nevezünk, és amelyre teljesülnek a következő feltételek:

(1) egybevágó testekhez ugyanazt a valós számot rendeljük
(2) ha egy testet véges sok résztestre bontunk, akkor a részekhez rendelt valós számok összege megegyezik az eredeti testhez rendelt valós számmal
(3) az egységnyi élű kockához *1*-et rendelünk.

Az egységkocka térfogatának ismeretében a téglatest térfogatképlete könnyen szemléltethető (legalábbis racionális élhosszúságok esetén). A téglatest térfogatából kiindulva, az egyenes hasáb térfogatát a háromszög alapú hasábokra darabolva vezetjük le általános iskolában. Itt felhasználjuk, hogy a sokszögek területe a részháromszögek területének összegével egyenlő (terület additív tulajdonsága), valamint, hogy a poliéderek térfogata a részpoliéderek térfogatának összege (térfogat additív tulajdonsága). A gúla és a hasáb térfogata közötti kapcsolatot üreges testek űrtartalmának kimérésével szemléltetjük. A hengert a hasábból, a kúpot a gúlából származtatva jutunk el 12. évfolyamon ezek térfogatképleteihez. A gömb térfogatának képlete a felszínéhez hasonlóan nem indokolható a középiskolai ismeretek birtokában.

A kerület, terület ill. a felszín, térfogat fogalmát elsősorban számítási feladatokban használjuk, melyek szövegezése sok esetben a gyakorlati élethez kötődik.

Példa

A szilveszteri mulatságra *24 cm* átmérőjű körlapból *3* egyforma körkúp alakú süveget szeretnénk készíteni úgy, hogy a körlapot *3* egybevágó körcikkre vágjuk. Milyen magasságú süvegeket tudunk így készíteni?

Megoldás

Egy-egy körív hossza a körlap kerületének harmada, azaz 8π, a középponti szögek $120°$-osak.

A körcikkből készült kúpfelület alapkörének kerülete megegyezik a körív hosszával. Innen a kúp alapkörének sugara kiszámítható (*4 cm*). A kúp alkotója *24* cm, magassága Pitagorasz tétele alapján számítható: $m = \sqrt{24^2 - 4^2} \approx 23{,}66$. Tehát a süvegek magassága kb. *23,66* cm.

Megjegyzés

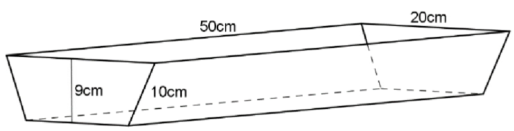
A realisztikus feladatok eredményeit abból a szempontból is értékelnünk kell, hogy megfelelnek-e a valóságnak. A fenti példában a süveg alapkörének átmérője kb. *25,12 cm*. Tudva, hogy egy felnőtt ember kalapmérete kb. *50-60 cm*, a kapott süvegek igen kicsik lesznek. Igaz, léteznek ilyenek, vékony gumiszalaggal erősíthetők fel a fejre.

Példa

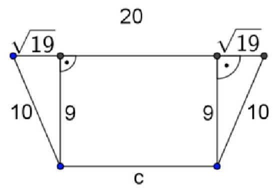
Virágládánk keresztmetszete olyan szimmetrikus trapéz, melynek szárai *10 cm*-esek. A láda magassága *8 cm*, hossza *50 cm*, felül pedig *20 cm* széles. Megbírjuk-e emelni, ha teletöltjük virágfölddel? ($1dm^3$ föld tömege kb. *1,4 kg*.)

Megoldás

A láda szimmetrikus trapéz alapú egyenes hasáb. A hasáb magassága *50 cm*, alapterülete a trapéz területével egyenlő. (*38. ábra*) A trapéz *c* alapját Pitagorasz tételének felhasználásával kapjuk: $c = 20 - 2 \cdot \sqrt{19} \approx 11{,}3cm$. (39. *ábra*)



38. ábra



39. ábra

A virágláda térfogata $V = \frac{\left(20 + 20 - 2 \cdot \sqrt{19}\right) \cdot 9}{2} \cdot 50 \approx 5077cm^3$.

A virágládába helyezett föld térfogata dm^3-ben kifejezve: *5,077* dm^3, a tömege pedig $5{,}077 \cdot 1{,}4 = 7{,}1078 \approx 7{,}11kg$. Ennyit biztosan fel tudunk emelni.

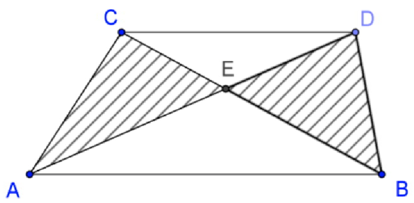
A gyakorlati feladatokon kívül előfordul az is, hogy valamely bizonyító feladatban alkalmazzuk pl. a területmegmaradás elvét, vagy a terület kiszámításának többféle, egyenértékű módját.

Példa

Igazoljuk, hogy a trapéz átlói a trapézt *4* olyan háromszögre bontják, melyek közül kettőnek a területe egyenlő!

Megoldás

Az *ABC* és az *ABD* háromszögek területe egyenlő, mivel alapjuk és az ahhoz tartozó magasságuk megegyezik. A két megjelölt háromszög ezekből az egyenlő területű háromszögekből úgy áll elő, hogy mindkettőből kivonjuk ugyanazt az *ABE* háromszöget. Egyenlő mennyiségekből egyenlőt kivonva a különbség is egyenlő lesz, ezért az *AEC* és az *EBD* háromszögek területe egyenlő. (*40. ábra*)



40. ábra

Példa

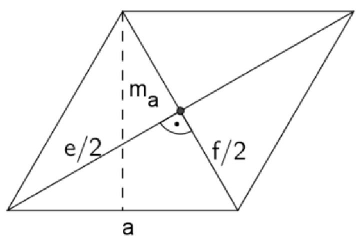
Mekkora a rombusz magassága, ha átlói *16 m* és *12 m* hosszúak?

Megoldás

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért területe kétféle képlettel is kiszámítható:

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{e \cdot f}{2}$$

Az *e* és *f* ismert, *a*-t Pitagorasz tétele alapján kiszámíthatjuk, így a fenti összefüggésből a rombusz magassága meghatározható. (*41. ábra*)



41. ábra

11.4.2. A szög

A szög fogalmának megértése az általános iskolás tanulók számára nem egyszerű, hiszen a sík végtelen tartományáról van szó. A szögnek létezik egy statikus és egy dinamikus definíciója.

Definíció
Két, egy pontból kiinduló félegyenes a síkot két részre bontja. Egy-egy ilyen részt szögtartománynak, röviden *szögnek* nevezünk.

Definíció
Ha a síkban egy félegyenest kezdőpontja körül adott irányban elforgatunk, akkor a félegyenes kezdő- és véghelyzete *forgásszöget* határoz meg.

Előbbi esetben a szög nagysága véges, utóbbiban végtelen, és ehhez az értelmezéshez irány is kapcsolódik (irányított szög).
A szögmérés bevezetéséhez kezdetben elegendő a statikus szögfogalomra támaszkodni.

Definíció
Ha egy szög két szára egy egyenesre esik, a szöget *egyenesszögnek* nevezzük.

A szögmérés egységéül azt a szöget választjuk, mely az egyenesszög *1* száznyolcvanad része. Ennek a szögnek a mértéke *1 fok (1°)*. A szögeket nagyságuk szerint csoportosítjuk, beszélünk nullszögről, hegyes szögről, derékszögről, tompaszögről, egyenesszögról, homorú szögről, teljesszögről és a teljes szögnél nagyobb forgásszögekről.
Nevezetes szögpárok nevezzük azokat a szögeket, melyek szárai páronként párhuzamosak vagy merőlegesek. Ezek nagysága egyenlő vagy *180°*-ra egészítik ki egymást a szárak állásától függően. Ha a szárak párhuzamosak és páronként egyirányúak (egyállású szögek) vagy páronként ellentétes irányúak (váltószögek, csúcsszögek), akkor nagyságuk egyenlő. Ha a két-két szögszár közül az egyik pár egyirányú, a másik pedig ellentétes, akkor a két szög összege *180°*. Ha a szárak merőlegesek, és mindkét szög hegyesszög vagy tompaszög, akkor nagyságuk egyenlő. Ha a merőleges szárú szögek egyike hegyes-, másika tompaszög, akkor ezek összege *180°*.

Definíció
Két metsző egyenes hajlásszögén a két egyenes által meghatározott kétkét egybevágó szögtartomány közül a kisebbiket értjük. Amennyiben a

négy szögtartomány egybevágó, a hajlásszög derékszög. Ekkor azt mondjuk, hogy a két metsző egyenes merőleges.

Megjegyzés
A derékszöget a fenti gondolatmenet alapján is lehet definiálni.

Térelemek hajlásszögét visszavezetjük metsző egyenesek hajlásszögére. Ennek megfelelően értelmezhetjük két egyenes, egyenes és sík, két sík hajlásszögét.

A sík és térgeometria témakör tárgyalásánál a szög statikus fogalmára támaszkodunk. A forgásszög és az irányított szög fogalma a geometriai transzformációk és a trigonometria témakörökben kerül előtérbe.

Középiskolában a fok mellett egy újabb szögmértéket vezetünk be, az ívmértéket vagy radiánt.

Az ívmérték bevezetése 9. évfolyamon történik, a kör és részeinek tanításához kötődően. Az értelmezéshez szükség van arra a tapasztalatra, hogy adott sugarú körben a középponti szög egyenesen arányos a hozzátartozó körív hosszával.

Definíció
1 radián annak a szögnek a mértéke, melyhez mint középponti szöghöz tartozó körív hossza megegyezik a kör sugarával.

A szögmértékek átszámításához felhasználjuk a kör kerületképletét. Eszerint egységsugarú körben a $360°$ középponti szöghöz 2π nagyságú körív tartozik, tehát a $360°$ 2π radiánnal egyenlő. Innen bármely szög nagysága – amennyiben azt az egyik szögmértékben ismerjük – a megfelelő aránypár felírásával a másik szögmértékkel kifejezhető.

Megjegyzés
A szögek nagyságának kifejezése radiánban nem öncélú, hiszen az ívmérték egy valós szám, így a trigonometria témakörben a távolság és a szög egységesen valós számmal fejezhető ki.

11.4.3. A távolság és a szögmérés kapcsolata

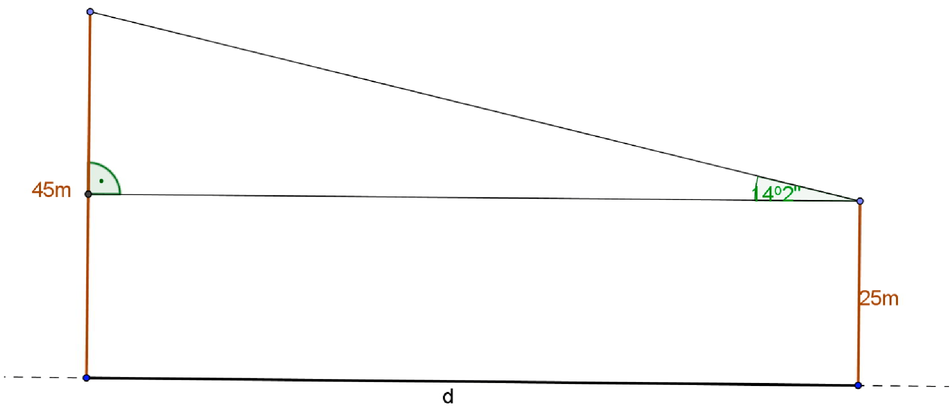
A távolság és a szögmérés kapcsolatával a trigonometria foglalkozik. Felhasználva, hogy a hasonló derékszögű háromszögekben a hegyesszögek megegyeznek, ezeket a szögeket két oldal arányából egyértelműen meghatározhatjuk. Így jutunk el a hegyesszögek szögfüggvényeinek értelmezéséhez, ami azt is jelenti, hogy a szög mérésével olyan távolságokat is meghatározhatunk, amelyek közvetlen megmérésére nincs lehetőség.

Példa

Egy *45 m* magas épület egy *25 m* magas épület tetejéről *14°2”* emelkedési szög alatt látszik. Milyen messze van a két épület egymástól?

Megoldás

A derékszögű háromszögben a szög és a szöggel szemközti befogó ismeretében a másik befogó kiszámítható (*42. ábra*):



42. ábra

$\mathrm{tg}14^0 2'' = \dfrac{20}{d} \Rightarrow d \approx 80{,}21$. A két épület távolsága kb. *80 m*.

Megjegyzés

A fenti számításban a szög tangensét négy tizedesjegy pontossággal határoztuk meg (*0,2494*). Ha egy tizedesjegyre kerekített értékkel (*0,3*) számoltunk volna, a reciprokképzés miatt a keresett távolságra jóval kisebb érték (*66,7 m*) adódik.

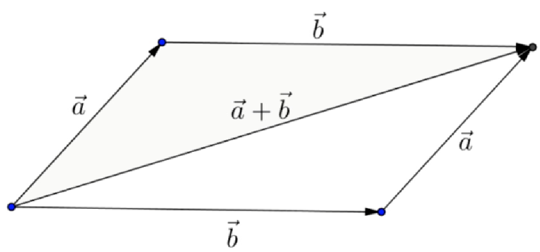
11.5. Vektorok

A vektort mint irányított szakaszt 8. évfolyamon, az eltolás tanítása előtt vezetjük be. Ezt követi 9. évfolyamon a vektorműveletek, majd a vektorkoordináták értelmezése.

Egy vektort tehát jellemez a nagysága (abszolútértéke vagy hossza), az állása és az iránya. Két vektor egyenlő, ha megegyezik állása (párhuzamos), iránya és nagysága.

A nullvektor és az ellentettvektor definiálása után rátérhetünk a vektorokkal végezhető műveletekre. A vektorok összeadása, kivonása, valamint skalárral (valós számmal) való szorzása (matematikai értelemben nem művelet) magával a szerkesztési eljárással definiálható.

Az összeadás kétféle módjáról (paralelogramma-módszer és összefűzés) megmutatjuk, hogy egymással ekvivalensek. A *43.ábráról* a vektorösszeadás kommutativitása is leolvasható.



43. ábra

A vektor skalárral való szorzásánál a skalár előjelétől függően az eredmény az eredeti vektorral egyirányú vagy ellentétes irányú vektor lesz. A vektor ellentettje pedig kifejezhető a vektor *-1*-szereseként. Ily módon a kivonást is összeadásnak tekinthetjük: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

Az összeadás és a skalárral való szorzás ismeretében értelmezhető a vektorok lineáris kombinációja.

Definíció

Két vagy több vektor *lineáris kombinációján* a vektorok skalárszorosának összegét értjük.

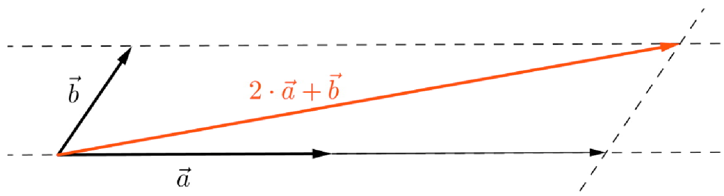
Ahhoz, hogy a vektorok lineáris kombinációjának geometriai fogalmát megértsük, adott vektorok lineáris kombinációjának megszerkesztése mellett a fordított feladattal, egy vektor adott két vektorral párhuzamos összetevőkre bontásával is foglalkozunk.

Példa

Adott az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$vektor. Szerkesszük meg a $2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$vektort!

Megoldás

Bármely két vektor eltolással közös kezdőpontba mozgatható. (*44. ábra*)



44. ábra

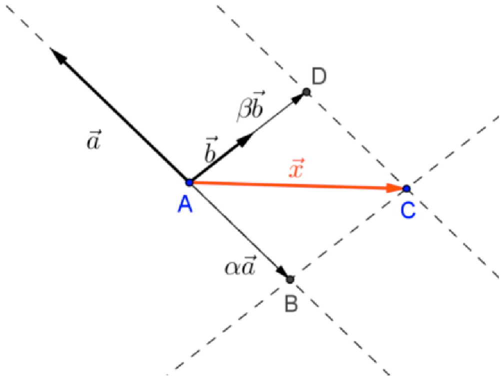
Ezek skalárszorosai ugyancsak közös kezdőpontúak, s amennyiben nem esnek egy egyenesre, mindig felfeszítenek egy paralelogrammát. Összegük ennek a paralelogrammának a közös kezdőpontból induló átlóvektora.

Példa

Az ábrán adottak az $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{x}$ vektorok. Bontsuk fel az $\vec{x}$ -et $\vec{a}$ és $\vec{b}$ irányú összetevőkre!

Megoldás

Az $\vec{x}$ vektor végpontján keresztül párhuzamosokat húzva az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok egyeneseivel kapjuk azt az *ABCD* paralelogrammát, melynek *A*-ból induló átlóvektora $\vec{x}$. (*45. ábra*)



45. ábra

Megjegyzés

A vektor komponensekre bontása vezet el a vektorkoordináták értelmezéséhez (lásd *Koordinátageometria* fejezet).

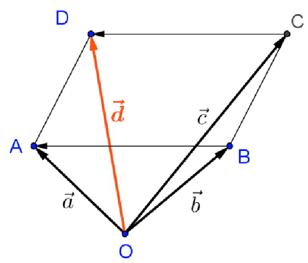
A vektorgeometriai feladatokkal a vektorok és vektorműveletek mélyebb megértését segítjük elő. Ezek egy része a fogalmak megerősítésére szolgál.

Példa

Az *ABCD* paralelogramma *A, B, C* csúcsaihoz egy tetszőleges *O* pontból rendre az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorok vezetnek. Állítsuk elő ezek segítségével az$\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ vektort!

Megoldás

Készítsük el a *46. ábrát*:



46. ábra

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$. Az *OCD* vektorháromszögből $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} - \vec{b}$.

Célszerű nem csak síkbeli, hanem térbeli elrendezést is vizsgálni.

Példa

Egy kocka egyik csúcsából induló három élvektor $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$. Állítsuk elő ezek segítségével a lapátló és a testátló vektorokat!

A feladatok másik része arra mutat rá, hogy a vektorok alkalmas eszközt jelenthetnek bizonyítási problémák megoldásához is.

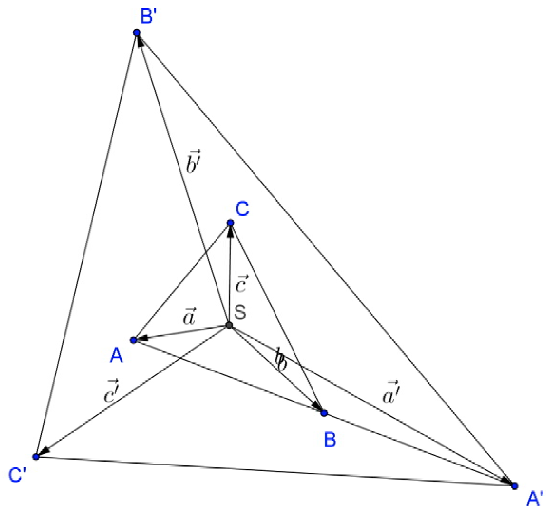
Példa

Az *ABC* háromszög *A* csúcsának *B*-re való tükörképe *A'*, *B* csúcsának *C*-re való tükörképe *B'*, *C* csúcsának *A*-ra való tükörképe *C'*. Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* és az *A'B'C'* háromszögeknek azonos a súlypontja!

Megoldás

Legyen *S* az *ABC* háromszög súlypontja. Belátható, hogy egy pontból a háromszög csúcsaiba mutató vektorok összege akkor és csak akkor *0*, ha ez a pont a háromszög súlypontja. (A bizonyításhoz azt használjuk ki, hogy a pontot a háromszög oldalfelezési pontjaira tükrözve paralelogrammákat kapunk.)

A *47. ábra* szerint kifejezzük az *S* pontból az *A'B'C'* háromszög csúcsaiba mutató vektorokat:



47. ábra

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} \rightarrow \overrightarrow{a'} = \vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a} = 2\vec{b} - \vec{a}$.

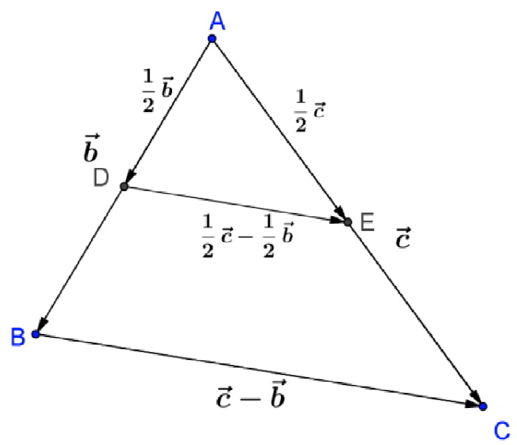
Hasonlóan a $\overrightarrow{b'}$ és a $\overrightarrow{c'}$ vektorok: $\overrightarrow{b'} = 2\vec{c} - \vec{b}$ és $\overrightarrow{c'} = 2\vec{a} - \vec{c}$.

Innen $\overrightarrow{a'} + \overrightarrow{b'} + \overrightarrow{c'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
Tehát az *S* pont az *A'B'C'* háromszögnek is súlypontja.

Hasznos lehet, ha a tanulók példát látnak ugyanannak a geometriai tételnek különböző eszközökkel történő bizonyítására is.

Példa
A háromszög középvonala párhuzamos és fele akkora, mint a hozzá tarozó oldal.

Megoldás
A háromszög két csúcsához a harmadik csúcsból vektorokat húzunk. (*48. ábra*)



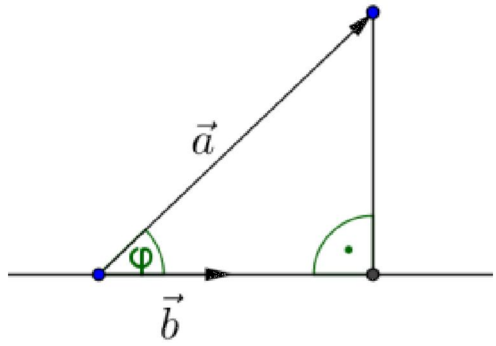
48. ábra

A kiválasztott csúccsal szemközti oldal- és középvonal vektort kifejezzük ezekkel a vektorokkal. Látható, hogy a középvonalvektor az oldalvektor $\frac{1}{2}$-szerese, ami a párhuzamosság feltétele.

11. évfolyamon a vektorokkal végzett műveletek sora a skaláris szorzattal bővül.

Definíció
Két vektor <u>*skaláris szorzatán*</u> a vektorok abszolútértékének és hajlásszögük koszinuszának szorzatát értjük. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

A skaláris szorzat geometriai jelentése: Az $\vec{a}$ vektornak a $\vec{b}$ vektor egyenesére eső merőleges vetülete (*49. ábra*).



49. ábra

Tétel

Két nem nulla vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor *0*, ha a vektorok merőlegesek egymásra.

A merőlegességet sok esetben vektorok skaláris szorzatán keresztül bizonyítjuk.

Példa

Legyenek $\vec{a}$ és $\vec{b}$ 60°-os szöget bezáró egységvektorok. Milyen $\lambda \in R$ esetén lesz $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ merőleges $\vec{b}$-re?

Megoldás

$$0 = (\vec{a} + \lambda\vec{b}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \cdot (\vec{b})^2 = \cos 60° + \lambda \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Példa

Igazoljuk, hogy ha két vektor összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor hossza egyenlő!

Megoldás

$0 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ ahonnan a két vektor hosszának egyenlősége már nyilvánvaló.

Megjegyzés

A skaláris szorzat alkalmas vektorok hajlásszögének meghatározásához, ha a skaláris szorzatot vektorkoordinátákkal is kifejezzük (lásd a *Koordinátageometria* fejezetet).

12. FEJEZET

Trigonometria

A szögfüggvényekkel kapcsolatos ismeretekkel a középiskola 10. és 11. évfolyamán ismertetjük meg a diákokat. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a korábbi tanulmányokkal ne kellene megalapoznunk a témakört. Mindaz, amit a derékszögű háromszögekről az általános és a középiskolában tanítunk, ezt a fejezetet is előkészíti. A hasonlósággal kapcsolatos ismeretek is előkerülnek az első nyolc évfolyamon is, a 10. évfolyamon pedig jó, ha közvetlenül megelőzik a trigonometria fejezetét. A háromszögek hasonlósági alapeseteinek segítségével ugyanis a témakör bevezetéseként megértethetjük, hogy a derékszögű háromszögek esetén közvetlen kapcsolat áll fenn az oldalarányok és a szögek között. Egy kis kombinatorikai feladványként rávezethetjük a tanulókat arra, hogy összesen hatféle oldalarányt definiálhatunk, vagyis ennyi szögfüggvényt adhatnánk meg, de mivel ezek közül kettő-kettő egymás reciprokaként áll elő, így tulajdonképpen elegendő hármat (illetve a mi gyakorlatunkban négyet) használnunk.

Ezek után megadhatjuk a hegyesszögek szögfüggvényeire érvényes definíciókat, vigyázva arra, hogy ne képleteket magoltassunk.

Definíció
Derékszögű háromszög α hegyesszögének <u>*szinuszán*</u> az α szöggel szemközti befogó és az átfogó hosszának hányadosát értjük. Jele: *sin α*.

Definíció
Derékszögű háromszög α hegyesszögének <u>*koszinuszán*</u> az α szög melletti befogó és az átfogó hosszának hányadosát értjük. Jele: *cos α*.

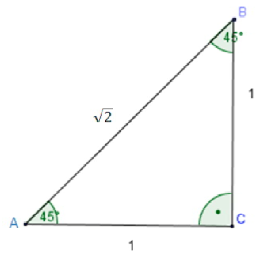
Definíció
Derékszögű háromszög α hegyesszögének <u>*tangensén*</u> az α szöggel szemközti befogó és az α szög melletti befogó hosszának hányadosát értjük. Jele: *tg α*, illetve *tan α*.

Definíció

Derékszögű háromszög α hegyesszögének <u>*kotangensén*</u> az α szög melletti befogó és az α szöggel szemközti befogó hosszának hányadosát értjük. Jele: *ctg α*, illetve *cot α*.

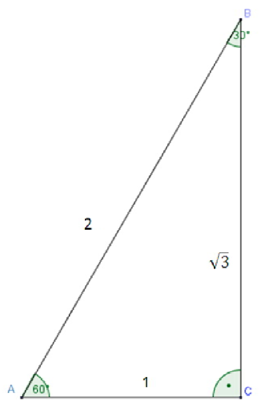
Ez utóbbi két szögfüggvény jelölése nem egyértelmű, hiszen a hazai matematikai szakirodalom jelölései mellett a számológépeken, a számítógépes szoftverek függvényeiként a második jelölési móddal találkoznak a diákok. Célszerű ezt a jelenleg még meglévő kettősséget idejekorán tisztázni a tanulókkal.

A fogalmakat elmélyítő, egyszerű gyakorló feladatok között mindenképpen hangsúlyt kell helyeznünk a nevezetes szögfüggvények bevezetésére. Ugyanakkor nem magoltatni kell; érdemes inkább azt a két háromszöget felrajzolni, amiből bármikor fel tudjuk írni ezeket.



1. ábra

Az *1. ábra* alapján $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$.



2. ábra

A *2. ábra* segítségével egyszerűen megadható, hogy

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{tg } 30^\circ = \text{ctg } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$\text{ctg } 30^\circ = \text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$.

Mindezek segítségével könnyen átvezethetjük diákjainkat a szög és pótszöge szögfüggvényei közt, valamint az azonos szög különböző szögfüggvényei közt fennálló összefüggések felismertetése felé.

Tétel

Legyen egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α. Ekkor fennállnak a következő összefüggések

(1) $tg\,\alpha = \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ (2) $ctg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$ (3) $ctg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha}$

(4) $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (5) $cos(90^\circ - \alpha) = sin\,\alpha$ (6) $ctg(90^\circ - \alpha) = tg\,\alpha$

Mindenképpen kell legalább egy tanórát szentelnünk a szögfüggvényértékek számológépen történő ki- és visszakeresésének, hiszen számtalan géptípust használnak diákjaink, s ezek mindegyikén meg kell mutatnunk azt, valamint fel kell elevenítenünk a korábban már tanult fokmértékívmérték átváltásának gépi lehetőségeit is. Történeti érdekességként megmutathatjuk a Négyjegyű függvénytáblázatok megfelelő oldalait is – ezzel kapcsolatban felhívhatjuk a figyelmet a szögfüggvény-értékek mindenkori négy értékes jegyre kerekítésének szükségességére is.

A begyakorlást egyszerű, derékszögű háromszögekre vonatkozó feladatokkal kell kezdenünk, majd rátérhetünk az egyenlő szárú, szabályos háromszögekre, később pedig a speciális négyszögekre.

Példa

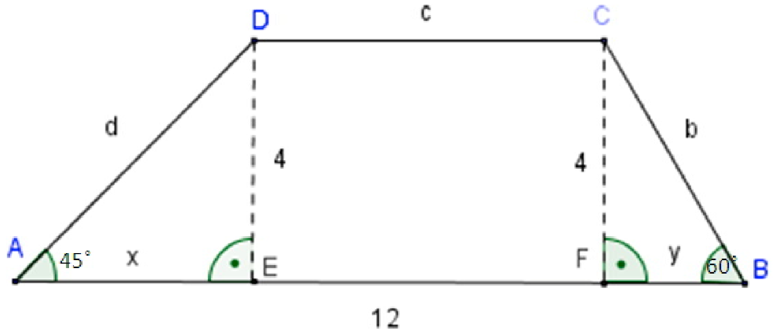
Számítsuk ki annak a derékszögű háromszögnek az oldalait és a szögeit, amelynek egyik hegyesszöge $\alpha = 26^\circ 54'$, e szöggel szemközti befogója pedig $a = 3{,}2\ cm$!

Megjegyzés

Mindenekelőtt fel kell hívnunk a figyelmet az átváltás szükségességére és módjaira $(\alpha = 26{,}9^\circ)$, majd a háromszög további szögeinek megadása után $(\beta = 63^\circ 6', \gamma = 90^\circ)$ a szinusz szögfüggvény segítségével kiszámíthatjuk az átfogó hosszát $\left(c=\dfrac{3,2}{\sin 26,9^\circ}\approx 7,1cm\right)$, tangenssel pedig a másik befogót $\left(b=\dfrac{3,2}{\mathrm{tg}\, 26,9^\circ}\approx 6,3cm\right)$. Felismertethetjük, hogy ez utóbbit a Pitagorasz-tétel segítségével is megadhattuk volna, továbbá felhívjuk a figyelmet arra, hogy a hosszúság-adatokat olyan pontossággal kell megadnunk, amilyen a feladat szövegében szerepel.

Példa

Egy trapéz hosszabbik alapja *12 cm*, az ezen fekvő két szöge *45*°-os és *60*°-os, magassága pedig *4 cm*. Határozzuk meg a trapéz kerületét milliméter-pontossággal!



3. ábra

Megjegyzés

A *3. ábrán* látható módon merőlegest bocsátunk a *C* és a *D* csúcsból az *AB* oldalra. Az így létrejövő *AED* és *BCF* háromszögekben szögfüggvények segítségével kiszámolhatjuk az x és y szakaszok hosszát $\left(x=4,\ y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, továbbá a b és d szárakat $\left(b=\dfrac{8\sqrt{3}}{3},\ d=4\sqrt{2}\ ,\right)$.

Ebből kiszámítható a c oldal $\left(c = 12 - 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 8 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ és a kerület is $\left(k = 12 + \frac{8\sqrt{3}}{3} + 8 - \frac{4\sqrt{3}}{3} + 4\sqrt{2} \approx 280\ mm\right)$.

A témakörhöz kapcsolódó gyakorlati jellegű feladatok széles tárházát nyújtják a tankönyvek és a példatárak. Itt is be kell tartanunk a fokozatosság elvét: előbb az egyszerűbb, egyetlen derékszögű háromszög felrajzolásával megoldható példákat tárgyaljuk, majd olyan síkbeli feladatokat, amelyekben segédváltozó bevezetésével egyenletrendszert kell felírnunk és megoldanunk; végül pedig tekintsünk ki a térbeli feladatok felé.

Példa

Milyen magasra visz az a lejtős út, amelynek hossza *120 m*, a vízszintessel bezárt szöge pedig *6,7°*?

Megjegyzés

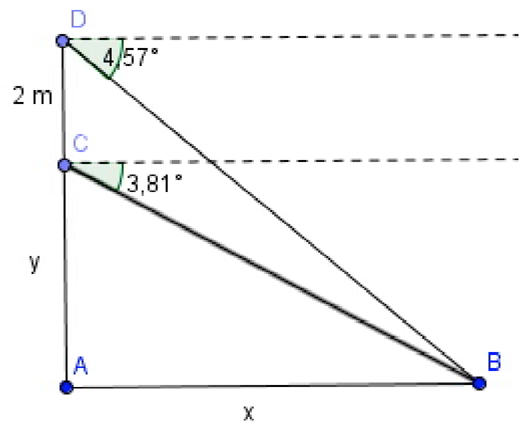
Szövegértési nehézségek miatt a tanulók egy része nehezen tudja eldönteni, hogy a *120 m* a felrajzolható derékszögű háromszög átfogójára vagy befogójára vonatkozik-e. Ennek eldöntése után már könnyen kiválasztható a megfelelő szögfüggvény és megoldható a feladat $(x = 120 \cdot \sin 6{,}7^{\circ} \approx 14\ m)$.

Példa

Közvetlenül a folyóparton áll egy ház. Ennek két, egymás fölött *2 m*-re lévő ablakából a folyó túlsó partja *3,81°*-os, illetve *4,57°*-os depressziószögben látszik. Milyen széles a folyó?

Megjegyzés

Mindenekelőtt tisztáznunk kell a depressziószög, azaz a süllyedési szög fogalmát, majd helyes ábrát készítünk *(4. ábra)*.



4. ábra

Ezt elemezve kiderül, hogy a feladat megoldásához célszerű egy új ismeretlent, az alsó ablak talajtól mért távolságát bevezetnünk. Legyen ez *y*, míg a folyó szélessége *x*! A váltószögek felismerése után a két derékszögű háromszögben felírható egyenletrendszer:

$(1) \quad \dfrac{x}{y} = tg\ 86{,}19^{\circ}$

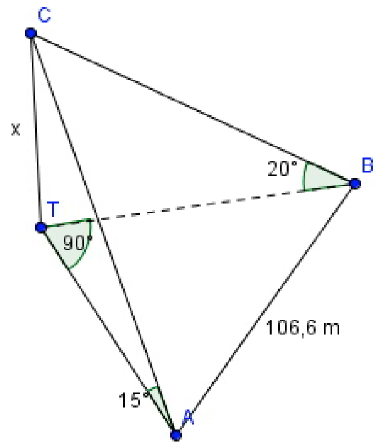
$(2) \quad \dfrac{x}{y+2} = tg\ 85{,}43^{\circ}$

Ebből a folyó szélessége könnyen kiszámítható $(x = 150\ m)$.

Példa

Egy sík terepen álló torony magasságát szeretnénk megmérni. A terep *A* pontjából *15°*-os, a *B* pontból *20°*-os emelkedési szögben látszik a torony *C* csúcsa, az $ATB\angle$ nagysága pedig *90°,* ahol *T* a torony talppontja. Az *AB* távolság *106,6 m*. Milyen magas a torony?

Megoldás

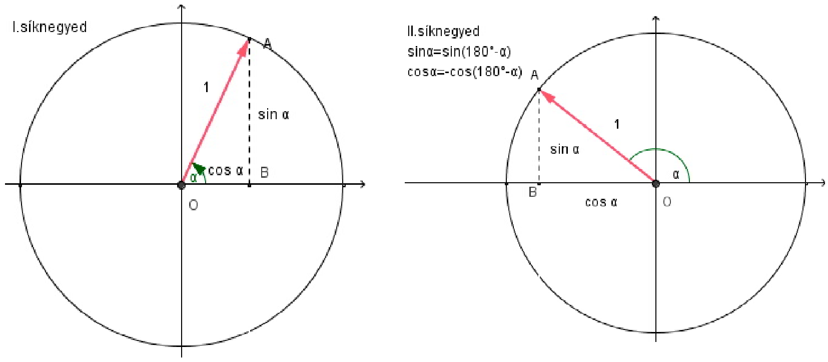


5. ábra

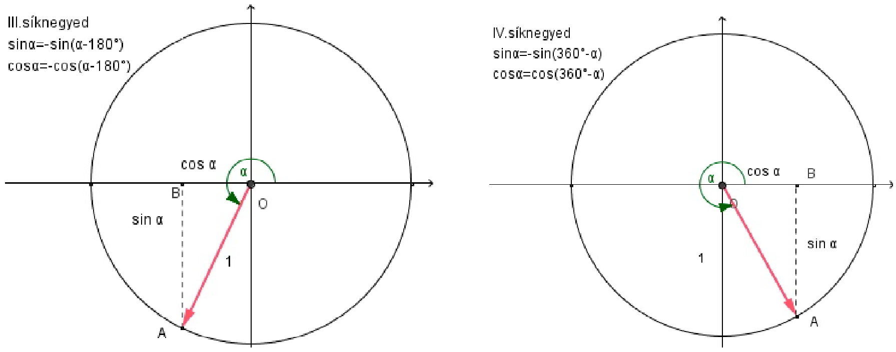
Jelöljük a torony magasságát *x*-szel *(5. ábra)*! Az *ATC* derékszögű háromszögben az *AT* befogó hossza $AB = x \cdot ctg 15°$, a *BTC* derékszögű háromszög *BT* befogójára pedig $BT = x \cdot ctg 20°$ adódik. Ebből az *ABT* derékszögű háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:
$(x \cdot ctg 15°)^2 + (x \cdot ctg 20°)^2 = 106{,}6^2$, amiből a magasság kiszámítható (*x = 23 m*).

A szögfüggvények általánosítása szintén a 10. évfolyamon következik be. Nagy segítségünkre lehet ebben a szemléltetés, különösen, ha módunkban áll interaktív táblánál dolgozni. Az egységkörben ábrázolt α irányszögű egységvektorok jellemzőit felírva és elmentve ugyanis minden további órán vissza tudjuk idézni a legfontosabb tulajdonságokat.

Az általánosítás bevezetése természetesen a derékszögű háromszögben már megismert fogalmak segítségével történhet.



6. ábra



7. ábra

Az I. síknegyedben felrajzolt, hegyesszögekre értelmezett ábra alapján kimondhatjuk az általános definíciókat, majd megmutatjuk a további síknegyedekbe és a tengelyekre eső szögek esetén érvényes összefüggéseket is *(6.,7.ábra)*.

Definíció
Az α szög <u>*szinusza*</u> az α irányszögű egységvektor második koordinátája.

Definíció
Az α szög <u>*koszinusza*</u> az α irányszögű egységvektor első koordinátája.

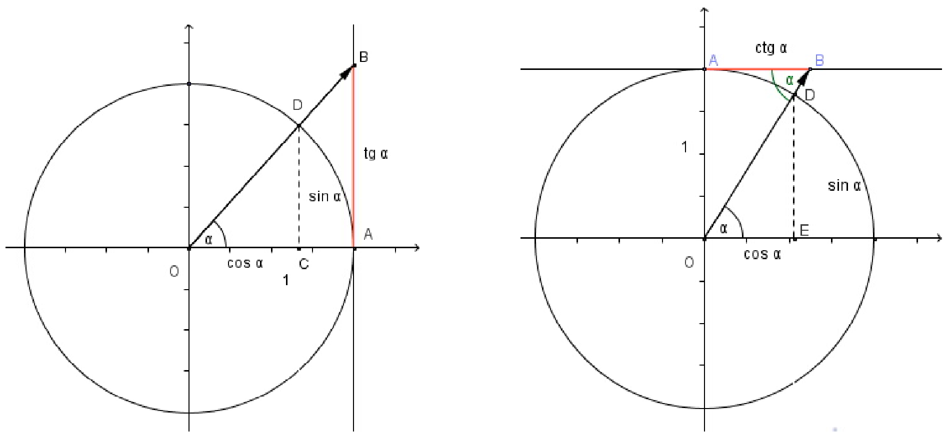
A tangens és a kotangens szögfüggvények általánosítása esetén is jó szolgálatot tehet az egységkör, hiszen ennek az $(1;0)$, illetve $(0;1)$ pontbeli érintőin szemléltethetjük ezeket.

Definíció

Legyen $\alpha \in R,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in Z$! Az α szög <u>tangense</u>: $tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$.

Definíció

Legyen $\alpha \in R,\ \alpha \neq k \cdot \pi,\ k \in Z$! Az α szög <u>kotangense</u>: $ctg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$.



8. ábra

A hasonlóság témakörében szerzett ismereteket felhasználva felismertetjük, hogy a *8. ábra* első egységkörében $OAB\Delta \sim OCD\Delta$, amiből $\frac{\mathrm{AB}}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, tehát AB = tg α. A második körben pedig az $OAB\Delta \sim OEC\Delta$, így itt $\frac{\mathrm{AB}}{1} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, vagyis AB = ctg α.

A definíciók begyakoroltatása, a korábban már megismert tulajdonságok felismertetése után értelmeznünk és jellemeznünk kell a trigonometrikus alapfüggvényeket, illetve transzformáltjaikat. Erről részletesebben írunk a *Függvények* fejezetben.

A függvények zérushelyeinek meghatározása kapcsán is fölmerül az egyszerűbb trigonometrikus egyenletek megoldása. Ezek megoldását már a 10. évfolyamon érdemes bevezetni, de később, a 11. évfolyamon ismét hosszabb időt kell szentelnünk ennek a nem könnyű témakörnek. A trigonometrikus egyenletekről az *Egyenlet, egyenlőtlenség* fejezetben írunk részletesebben.

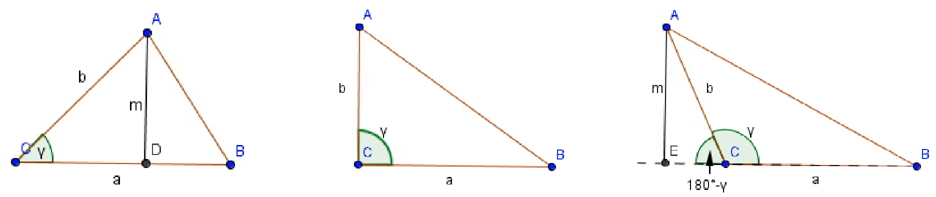
A 11. évfolyamon a szögfüggvények geometriai számításokban történő alkalmazásairól is beszélnünk kell. Egyes tankönyvek már a 10. évfolyamon, a szögfüggvények általánosítása után levezetik a háromszög „szinuszos” területképletét.

Tétel

Legyen a háromszög két oldala a és b, az általuk közrezárt szög pedig γ. Ekkor a háromszög területe $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Megjegyzés

Ezt a tételt mindenképpen érdemes bizonyítani, hiszen ezzel példát mutathatunk az esetszétválasztás fontosságára. Külön kell ugyanis kezelnünk a bizonyítás során a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszög esetét. (*9. ábra*)



$m = b \cdot \sin\gamma$ $\qquad m = b = b \cdot \sin 90^0$ $\qquad m = b \cdot \sin(180^0 - \gamma) = b \cdot \sin\gamma$

9. ábra

Ezt a területképletet többek között a szabályos sokszögek, illetve a körszelet területének kiszámítása során is alkalmazhatjuk.

Példa

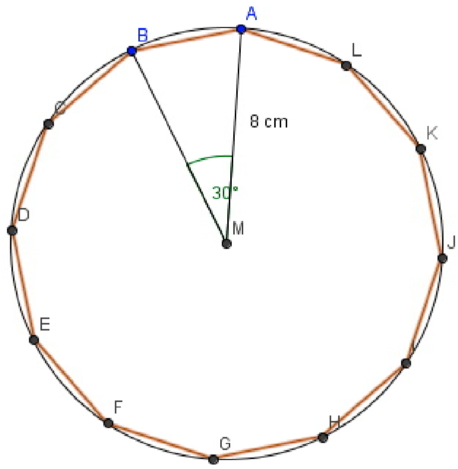
Számítsuk ki a *8 cm* sugarú körbe írható szabályos tizenkétszög területét és kerületét!

Megjegyzés

A diákok könnyen látják, hogy ezt a szabályos 12-szöget 12 egybevágó, egyenlő szárú háromszögre bonthatjuk *(10. ábra)*, melyek szára *8 cm* hosszú, szárszöge pedig $\gamma = \dfrac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

A terület így $T_{12} = 12 \cdot \frac{8^2 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 192 \text{ cm}^2$. A kerület kiszámításához az egyenlő szárú háromszög alapját kell megadni, ezt pedig derékszögű háromszögekre bontással tehetjük meg.

Az $\frac{a}{2 \cdot 8} = \cos 75^\circ$ összefüggésből $a \approx 4{,}14$ cm, amiből $K_{12} = 49{,}7$ cm.



10. ábra

Példa

Mekkora területű részekre osztja a *8 cm* sugarú kört a *12 cm* hosszú húrja?

Megjegyzés

Miután körszeletek területét kell kiszámítanunk, szükségünk van a körszelethez tartozó középponti szögre. Ismét eljárhatunk derékszögű háromszögekre bontással, de ki is számíthatjuk a háromszög területét a Hérón-képlettel, majd a szöget a szinuszos területképlettel. A területre $T = \sqrt{14 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2} = 12\sqrt{7}$ adódik, a szög kiszámítása során azonban óvatosan kell eljárnunk, hiszen a $\sin \gamma = \frac{12\sqrt{7}}{32}$ összefüggésből egy hegyes- és egy tompaszög megoldás is adódhat. Így ezen megoldási út esetén először az alapon fekvő α szöget kell megadnunk – hiszen az mindenképpen hegyesszög – , majd ebből adódhat a helyes γ érték.Mivel $\sin\alpha = \frac{12\sqrt{7}}{48}$, így $\alpha \approx 41{,}4$, amiből $\gamma = 180^\circ - 2\alpha = 97{,}2^\circ$ következik.A kisebbik körszelet területe ebből $T_{sz1} = \frac{8^2}{2}\left(\frac{\pi}{180}\cdot 97{,}2^\circ - \sin 97{,}2^\circ\right) \approx 22{,}54\ \text{cm}^2$, a nagyobbiké pedig $T_{sz2} = T_{kör} - T_{sz1} \approx 178{,}52\ \text{cm}^2$.

A 11. évfolyam trigonometria fejezetének két legfajsúlyosabb tétele a szinusz- és a koszinusztétel. Ezek teszik lehetővé, hogy általános háromszögekben is dolgozhassunk a szögfüggvényekkel.

Tétel (Szinusztétel)
Legyen az *ABC* háromszög három oldala *a*, *b*, *c*, az oldalakkal szemközti szögek pedig rendre *α*, *β*, *γ*. Ekkor $\mathrm{a} : \mathrm{b} : \mathrm{c} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$, azaz az oldalak aránya megegyezik a megfelelő oldalakkal szemközti szögek szinuszának arányával.

Megjegyzés
A tételt a legkönnyebben a szinuszos területképlet segítségével tudjuk bizonyítani. Kétféleképpen felírva ugyanis a háromszög területét $\left(T = \frac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2} = \frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}\right)$, a megfelelő egyszerűsítések és osztások elvégzésével adódik az $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ összefüggés. Természetesen ilyenkor is ki kell térnünk arra, hogy mind a *b,* mind a sin *β* értéke 0-tól különböző. Bármely két szöggel felírva a területek egyenlőségét, ugyanígy adódnak a megfelelő arányok, amiből már a tétel állítása következik.

Tétel (Koszinusztétel)
Legyen az*ABC* háromszög három oldala *a, b, c*, az oldalakkal szemközti szögek pedig rendre *α, β, γ*. Ekkor $c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$, azaz bármely oldal hosszának négyzete megegyezik a másik két oldal négyzetösszegének és e két oldal, továbbá az általuk közrezárt szög koszinusza kétszeres szorzatának a különbségével.

Megjegyzések

- A bizonyítást elvégezhetjük például vektorokkal, a skaláris szorzat segítségével. Fel kell ismertetnünk, hogy a koszinusztétel tulajdonképpen a Pitagorasz-tétel általánosítása.
- Azt szoktuk mondani, hogy minden feladatot, amit az egyik tétellel megoldhatunk, kiszámíthatunk a másikkal is – ez azonban a mai diákok ismeretanyagával nem teljesen igaz, hiszen például a trigonometrikus addíciós tételek általában nem állnak rendelkezésükre készségszinten. Így fogódzót kell nyújtanunk a számukra, hogy melyik tételt mikor érdemes használni. Teljesen világos, hogy ha egy háromszög három oldala adott, és a szögeire vagyunk kíváncsiak, akkor a koszinusztétellel boldogulunk gyorsabban. Ha viszont a szögei adottak, továbbá egyik oldala, akkor a szinusztételt érdemes alkalmazni. A további esetekben az adatok függvényében érdemes mérlegelnünk, hogy melyik tételt használjuk. Általánosságban érdemes megjegyeznünk, hogy ha szöget akarunk számolni, akkor inkább a koszinusztételt érdemes választanunk, hiszen a koszinusz az előjelével jelzi, hogy az adott szög hegyesszög-e, vagy sem, nem kell az esetszétválasztással bajlódnunk.

Lássunk minderre néhány példát!

Példa

Egy háromszög két szöge $\alpha=83^\circ$ és $\beta=67^\circ$, a nagyobbikkal szemközti oldalának hossza $a=21{,}0\ cm$. Határozzuk meg a háromszög további oldalait és szögét!

Megjegyzés

A harmadik szög egyszerű kivonással adódik $(\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 30^\circ)$. A b oldalt szinusztétellel könnyen meg tudjuk határozni $\left(\frac{b}{21} = \frac{\sin 67^\circ}{\sin 83^\circ} \rightarrow b \approx 19{,}5\ cm\right)$, a c megadásához pedig mindkét tétel jól használható $\left(\frac{c}{21} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 83^\circ} \rightarrow c \approx 10{,}6\ cm\right)$. Hívjuk fel a diákok figyelmét arra, hogy el kell tudniuk rugaszkodni a tétel jelöléseitől: úgy könnyebb megoldani az egyenletet, ha az aránypár felírásakor a kiszámítandó ismeretlen a számlálóba kerül.

Példa

Egy háromszög oldalai $a = 6\ cm$, $b = 9\ cm$, $c = 11\ cm$. Határozzuk meg a szögeit!

Megjegyzés

A megoldást koszinusztétel felírásával érdemes kezdeni. Ha azonban arra gondolunk, hogy később a könnyebben alkalmazható szinusztétellel is dolgozni fogunk, akkor érdemes először a legnagyobb oldallal szemközti, legnagyobb szöget kiszámolni, hiszen legfeljebb ez lehet tompaszög. Érdemes a koszinusztétel $\cos\gamma$-ra kifejtett alakját is megmutatni a diákoknak $\left(\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \approx -0{,}0370 \rightarrow \gamma = 92{,}1^\circ\right)$. Ezután bátran alkalmazhatjuk a szinusztételt is, hiszen a további szögek csak hegyesszögek lehetnek, így a szinusz alapján is egyértelműen meghatározhatók $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\sin 92{,}1^\circ} = \dfrac{6}{11} \rightarrow \alpha = 33{,}0^\circ,\ \beta = 54{,}9^\circ\right)$.

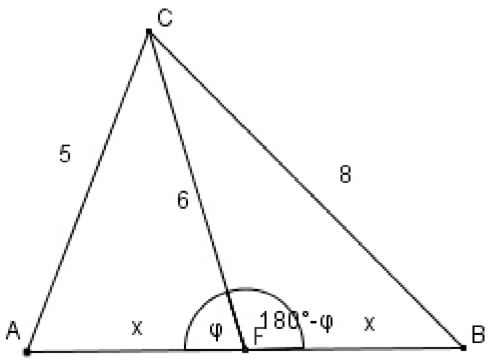
A tételek begyakorlása kapcsán alkalom nyílik a háromszög nevezetes vonalainak felelevenítésére is.

Példa

Egy háromszög két oldala *5* és *8 cm*, a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonala *6 cm*. Mekkora a harmadik oldal? Az oldal hosszát két tizedesjegyre kerekítve adjuk meg!

Megjegyzés

A harmadik oldal kiszámításához célszerű két koszinusztételt felírnunk. Ehhez tulajdonképpen a *11. ábrán* látható három közül bármelyik két háromszöget választhatjuk.



11. ábra

Most használjuk fel azt az ismeretünket, hogy az F-nél lévő szögek kiegészítő szögek. Így a két kis háromszögben felírható két koszinusztétel egyenletrendszert alkot:

$$\left.\begin{aligned} 25 &= x^2 + 36 - 12x \cdot \cos\varphi \\ 64 &= x^2 + 36 - 12x \cdot \cos(180^\circ - \varphi) \end{aligned}\right\}$$

Felismertetjük, hogy $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi$, tehát a második egyenlet átírható $64 = x^2 + 36 + 12x \cdot \cos\varphi$ alakba, ahonnan a két egyenlet összeadásával $2x^2 = 17 \rightarrow c = 2x \approx 5{,}83$ cm következik.

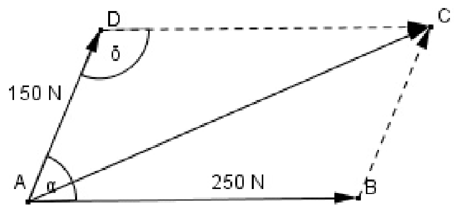
A tantárgyi koncentráció megvalósításához nem árt becsempészni egy-egy fizikához kötődő feladatot.

Példa

Egy testre két erő hat, az egyik *150 N*, a másik *250 N* nagyságú. A két erő *70°*-os szöget zár be egymással. Mekkora az eredő erő és hány fokos szöget zár be a nagyobbik erővel?

Megjegyzés

Fel kell elevenítenünk, hogy vektormennyiségekről van szó, amiket a paralelogramma-szabály segítségével összegezhetünk *(12. ábra)*.



12. ábra

Mivel a δ szög *110°*-os, így az *ACD* háromszögben koszinusztétellel könnyen kiszámíthatjuk az eredő erőt.

$\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 150^2 + 250^2 - 2 \cdot 150 \cdot 250 \cdot \cos 110^\circ \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| \approx 333 \text{ N} \right)$, szinusztétellel pedig a $BAC\angle$-et is $\left(\dfrac{\sin BAC\angle}{\sin 110^\circ} = \dfrac{150}{333} \rightarrow BAC\angle \approx 25^\circ \right)$.

Ebben az esetben bátran használhatjuk a szinusztételt, hiszen ez a szög csak hegyesszög lehet.

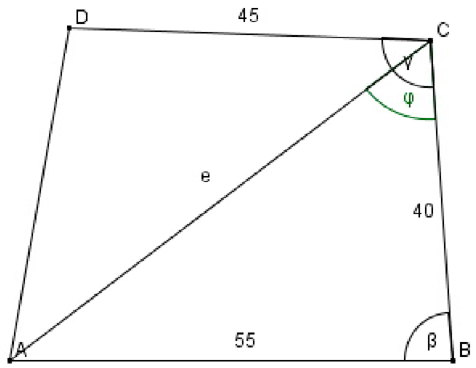
Gyakorlati jellegű feladatokban is jól használhatjuk a tételeket.

Példa

Egy négyszög alakú telek három oldala *AB = 55 m*, *BC = 40 m*, *CD = 45 m*, az $ABC\angle = 86^\circ$, a $BCD\angle = 96^\circ$. Mekkora a telek értéke, ha egy *m²* ára *10.000 Ft*?

Megjegyzés

Felismertetjük, hogy a területet kell kiszámolni, azt pedig háromszögekre bontással tudjuk megtenni *(13. ábra)*.



13. ábra

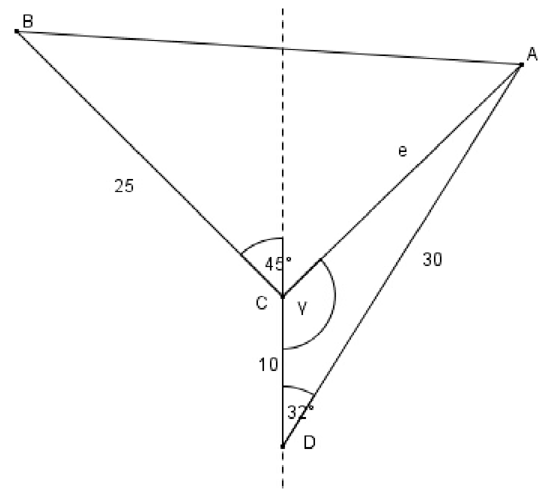
Ha például az ABC háromszöget tekintjük, akkor a négyszög AC átlója koszinusztétellel kiszámítható $(e \approx 65{,}7)$. Az ACD háromszögre való áttéréshez azonban a φ szöget is ki kell számolnunk. Ezt szinusztétellel is megtehetjük, hiszen biztosan hegyesszögről van szó $(\varphi \approx 56{,}6^\circ)$. Ezen adatok ismeretében a terület már kiszámítható

$$\left(T = T_{ABC} + T_{ACD} = \frac{40 \cdot 65{,}7 \cdot \sin 56{,}6^\circ}{2} + \frac{45 \cdot 65{,}7 \cdot \sin\left(96^\circ - 56{,}6^\circ\right)}{2} \approx 2035{,}3 \text{ m}^2 \right).$$

A telek értéke így ezresekre kerekítve *20.353.000 Ft*.

Példa

Egy egyenes országútból jobbra *32*°-os szög alatt egy mellékút ágazik el. Az országúton *10 km*-t tovább haladva, újabb elágazást találunk, a menetirányhoz képest balra, *45*°-os szög alatt. Az első mellékúton *30 km*-t haladva egy *A* kilátóhoz, míg a másodikon *25 km*-re egy *B* kilátóhoz érkezünk. Milyen messze van légvonalban ez a két kilátó egymástól?



14. ábra

Megjegyzés

Mindenekelőtt a feladatnak megfelelő ábra elkészítése, a megfelelő szögek bejelölése okoz gondot a diákok számára *(14.ábra)*.Ezután azt is fel kell ismerniük, hogy ebben az esetben konkáv négyszögben kell dolgoznunk, de ekkor is alakíthatunk ki háromszögeket bármelyik átló berajzolásával. Ha az AC átlót választjuk, akkor az ACD háromszögben koszinusztétellel kiszámíthatjuk $\left(e^2 = 10^2 + 30^2 - 2 \cdot 10 \cdot 30 \cdot \cos 32^\circ,\ e \approx 22{,}16\ km\right)$. Most is meg kell határoznunk a C-nél lévő γ szöget a továbblépéshez, méghozzá koszinusztétellel, hiszen a nagyságrendje kérdéses $\left(\cos\gamma = \frac{10^2 + 22{,}16^2 - 30^2}{2 \cdot 10 \cdot 22{,}16},\ \gamma \approx 134{,}19^\circ\right)$. A γ ismeretében megadhatjuk az ACB szöget $\left(ACB\angle = 180^\circ - \gamma + 45^\circ \approx 90{,}81^\circ\right)$. Innen az ABC háromszögben a kért AB távolság koszinusztétellel kiszámítható

$$\left(AB^2 = 25^2 + 22{,}16^2 - 2 \cdot 25 \cdot 22{,}16 \cdot \cos 90{,}81^\circ,\ AB \approx 33{,}6\ \text{km}\right).$$

A trigonometrikus addíciós tételek a korábbi években a jelenleginél nagyobb hangsúlyt kaptak a középiskolai oktatásban. Ma sem kell azonban lemondanunk megismertetésükről, hiszen mind a trigonometrikus egyenletek, mind a szöveges feladatok kapcsán előtérbe kerülhet alkalmazásuk, és a természettudományos, gazdasági szakirányban továbbtanuló diákjaink számára is elengedhetetlen ismeretük. Így célszerű azt az utat választani ismertetésükre, hogy a $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ képleteit – esetleg bizonyítás nélkül – ismertetjük, majd néhány további összefüggést ezekből a diákokkal közösen, gyakorló feladatként levezetünk. Ezzel nem csupán a képletek szerkezetét, használatát mélyíthetjük el, hanem rávilágíthatunk néhány, a diákok számára talán már feledésbe merült ismeretre. Így például a $\sin(\alpha-\beta)$ és $\cos(\alpha-\beta)$ levezetése során feleleveníthetjük a trigonometrikus függvények paritását:

Példa

A $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ képleteinek ismeretében vezessük le $\sin(\alpha-\beta)$ képletét!

Megjegyzés

A $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$ összefüggésből a koszinusz-függvény páros, illetve a szinusz-függvény páratlan tulajdonsága miatt következik, hogy
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

A $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ levezetése alkalmat ad a definíció, illetve a feltételvizsgálat gyakorlására.

Példa

A $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ képletek ismeretében vezessük le $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$-t!

Megjegyzés

Mivel $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$, így $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$. Ha a számlálót és a nevezőt is elosztjuk $\cos\alpha\cos\beta$-val, akkor a kifejezés a következőképpen alakul: $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$. Innen egyszerűsítések és a definició alkalmazása után adódik, hogy $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$, ha-csak $\alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$.

Gyakorlásként érdemes levezetni a kétszeres, háromszoros szögek szögfüggvényeit is, illetve egyes feladatokban felidézhetjük a nevezetes szögfüggvényeket.

Példa

Határozzuk meg a *75*°-os szög szögfüggvényeinek pontos értékét!

Megjegyzés

Mivel

$$\sin 75^\circ=\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

és hasonlóan

$$\cos 75^\circ=\sin\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

így a $\mathrm{tg}75^\circ$ akár ezek hányadosaként is előállítható, lehetővé téve, hogy a nevező gyöktelenítését is felidézzük:

$$\mathrm{tg}75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{6-2}=\frac{8+2\sqrt{12}}{4}=2+\sqrt{3}$$

Emelt szinten természetesen mindezt részletesebben, mélyebben kell tárgyalnunk. Középszinten is előkerülnek a trigonometriai ismeretek a későbbi fejezetek tárgyalása során: mindenekelőtt a koordináta-geometriában, illetve a térgeometriai feladatmegoldások során használhatjuk sikerrel a szögfüggvényeket.

13. FEJEZET

Koordinátageometria

Koordinátarendszerben pontok ábrázolásával, később a függvények grafikonjának megadásával már általános iskolában foglalkoznak a tanulók. Kilencedik évfolyamon újabb függvénytípusok grafikonját ismerik meg, koordinátákra vonatkozó feltételekkel megadott ponthalmazokat is ábrázolnak, majd a vektorok tárgyalásakor kerül sor a vektor koordinátáinak bevezetésére, vektorok koordinátasíkon való ábrázolásának megbeszélésére. Ezekre az előzetes ismeretekre építhetünk a koordinátageometria témakör bevezetésekor, 11. évfolyamon.

A koordinátageometria mégis teljesen új fejezetnek tekinthető abban a megközelítésben, mely szerint feladata geometriai problémák algebrai eszközökkel történő megoldása. Ahhoz tehát, hogy valaki jó legyen ebben a témában, biztos geometriai és algebrai alapokkal kell rendelkeznie. Ez adja ennek a témakörnek a nehézségét és egyben a szépségét is.

Középiskolában a térbeli koordinátarendszer fogalmával a ponthalmazok tanítása során szokás foglalkozni. Ez a kis kitekintés két dologra szokott kiterjedni: a pontok megadására, amelyhez térben 3 koordinátára van szükség; illetve speciális helyzetű, a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek és síkok megadására. A továbbiakban mindig a koordinátasíkon dolgozunk.

13.1. Vektorok koordinátageometriája

A vektorok felbontásával kapcsolatban (9-10. évfolyamon) találkozunk először a vektor koordinátáinak fogalmával (lásd *Vektorok* fejezet 201. oldal).

A vektorok jelölésére többféle mód ismert: felül húzott nyíl, aláhúzás vagy vastag betűs kiemelés. Ebben a fejezetben az utóbbi jelölésmódot használjuk.

Tétel

Ha **a** és **b** nullvektortól különböző és nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egysíkú **v** vektor egyértelműen felbontható **a**-val és **b**-vel párhuzamos komponensekre. Tehát a **v** vektor egyértelműen felírható **v** = $\alpha \cdot \mathbf{a} + \beta \cdot \mathbf{b}$ alakban.

Elnevezések: **a** és **b** *<u>bázisvektorok</u>*; α és β a **v** vektor (adott bázisra vonatkozó) *<u>koordinátái</u>*. Jelölés: **v**(α; β).

Megállapodunk abban, hogy a síkbeli koordinátarendszerben vonatkoztatási pontnak az origót, bázisvektoroknak az origóból az x- és az y-tengely pozitív irányába mutató **i** és **j** egységvektorokat tekintjük. Így a fentiek szerint megadható a koordinátasík bármely vektorának két koordinátája. Az origóból induló helyvektorok koordinátái pedig megegyeznek végpontjuk koordinátáival.

Ezek alapján, ha adott **a**(a_1; a_2) és **b**(b_1; b_2) vektor, akkor megadható

- a két vektor összege: **a**+**b**(a_1+b_1; a_2+b_2)
- a két vektor különbsége: **a**-**b** (a_1-b_1; a_2-b_2)
- vektor számszorosa: λ**a** (λa_1; λa_2)
- vektor 90°-os elforgatottja: (a_2; $-a_1$) vagy ($-a_2$; a_1)
- vektor abszolútértéke: |**a**| = $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- két vektor skaláris szorzata: **ab** = $a_1 b_1 + a_2 b_2$
- két vektor hajlásszöge: $\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|a| \cdot |b|}$.

Megjegyzés

A fenti állításokat nem nehéz általánosan bizonyítani. Ha a csoport felkészültsége, érdeklődése miatt a tanár úgy dönt, hogy a bizonyításokkal nem foglalkozik, akkor is érdemes – a felsoroltak közül az első öt esetben – konkrét példákat mutatni (koordinátasíkon ábrázolni), majd ezekből kiindulva általánosítani az eredményt.

Példák

Adott az **a**(-3; 4) és a **b**(7; 2) vektor.

(1) Számítsuk ki a két vektor abszolútértékét, skaláris szorzatát, hajlásszögét!

(2) Adjunk meg az **a** vektorral párhuzamos vektort, melynek hossza fele az **a** hosszának!

(3) Adjunk meg a **b** vektorra merőleges vektort, melynek hossza egységnyi!

(4) Döntsük el, hogy a **c**(8; -28) és a **d**(7,5; 10) vektorok között van-e az **a** vagy **b** vektorral párhuzamos vagy rájuk merőleges vektor!

(5) Egy négyzet középpontja $K(5; 2)$, a középpontból az egyik csúcsába mutató vektor **v**(-3; 7). Határozzuk meg a négyzet csúcsainak koordinátáit!

Megjegyzés

Gyakori hiba, hogy a vektor végpontjának koordinátáit mindig egyenlőnek tekintik a vektor koordinátáival. Ez azonban csak az origóból kiinduló helyvektorokra igaz. Az (5) részben tehát a **v** vektor, annak ellentettje, illetve 90°-os elforgatottjai nem határozzák meg közvetlenül a csúcsok koordinátáit. A csúcsokba mutató helyvektorokat úgy kapjuk meg, ha az elforgatott vektorokhoz hozzáadjuk a középpontba mutató helyvektort.

Megjegyzés

Nagyon fontos az alapvető számítások, „kis lépések" biztos ismerete. Ezek begyakorlására szánjunk elegendő időt, mert az összetettebb feladatok is ilyen egyszerű lépésekre bonthatók fel.

13.2. A pont koordinátageometriája

Annak ismeretében, hogy a koordinátasíkon a pontok koordinátái megegyeznek a pontba mutató helyvektorok koordinátáival, vektorok segítségével igazolhatók a szakasz hosszára, felezőpontjára, harmadolópontjára, adott arányú osztópontjára, háromszög súlypontjára vonatkozó képletek.

Ha adott $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$ pont, akkor:

- az $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátái: $(b_1 - a_1; b_2 - a_2)$
- az AB szakasz hossza: $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$
- az AB szakasz felezőpontjának koordinátái: $\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$
- az ABC háromszög súlypontjának koordinátái: $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$.

Megjegyzés

A szakasz hosszának kiszámítása két egyszerűbb ismeretből összerakható (kezdő- és végpontjával adott vektor koordinátái, vektor abszolútértéke). A képlet megjegyzésében az is segíthet, ha egy ábrán bemutatjuk, hogy a Pitagorasz-tétel alkalmazásáról van szó.

Példa

Adott a koordinátasíkon két pont: $P(-1; 5)$, $Q(7; 3)$. Írjuk fel a $\overrightarrow{PQ}$ vektor koordinátáit!

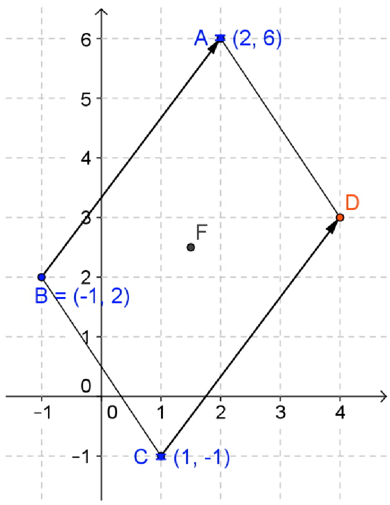
Megjegyzés

Nagyon egyszerű, de nagyon lényeges ismeretről van szó, szinte mindig használjuk, hogy a koordinátarendszer tetszőleges vektora egyenlő a végpontjába és a kezdőpontjába mutató helyvektorok különbségével.

Példa

Egy paralelogramma három csúcspontjának koordinátái az egyik körüljárási irányban (2; 6), (-1; 2), (1; -1). Határozzuk meg a negyedik csúcspont koordinátáit!

Megoldás



1. ábra

(1) Felhasználjuk, hogy a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.

Az *1. ábra* jelöléseivel: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, vagyis a csúcsokba mutató helyvektorokkal kifejezve:

d–**c**=**a**–**b**, így a keresett D csúcsba mutató helyvektor: **d**=**c**+**a**–**b**. Ezzel megkapjuk a D pont koordinátáit is: (4; 3).

(2) Felhasználjuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

Az AC szakasz felezőpontja F(1,5; 2,5). Jelöljük a D pont koordinátáit (x, y)-nal. Az F pont a BD átlónak is felezőpontja: $1{,}5 = \frac{-1+x}{2}$ $2{,}5 = \frac{2+y}{2}$. Az egyenletekből D(4; 3).

Megjegyzések

- A feladatnak érdemes többféle megoldását is megbeszélni. Ezzel a paralelogrammáról tanultakat is felfrissíthetjük, és többféle koordinátageometriai gondolatmenetet gyakorlunk.
- A feladat nehezebb változata az, hogy nem adjuk meg a körüljárási irányt. Így a teljes megoldás három eset kiszámítását jelenti. Heterogén csoportban lehetőséget ad a differenciálásra, ha a feladatot kétféle megfogalmazásban adjuk fel.
- Minden feladatnál segítséget jelent az ábra. Egy pontos ábráról sokszor az eredmény is leolvasható (vigyázzunk, ez nem a teljes megoldása a feladatnak), így számításainkat ellenőrizni is tudjuk. Összetettebb feladatoknál érdemes külön vázlatot készíteni, amelyen a megoldás tervét, lépéseit végiggondolhatjuk.

Példa

Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit, ha A(-2; 4), B(3; 5), C(6;-1)!

Megjegyzés

Most is többféle megoldás közül választhatunk (vagy mindet megbeszélhetjük). (1) Az oldalak hosszát kiszámoljuk, majd koszinusztétellel a legnagyobb szöget, aztán még egy szöget koszinusz- vagy szinusztétellel. (2) Oldalvektorokat írunk fel, és a skaláris szorzatukból határozzuk meg a szögeket. Vigyázzunk arra, hogyan irányítjuk a vektorokat! (Pl. az A csúcsnál levő szöget nem adja meg az $\overrightarrow{AB}$ és a $\overrightarrow{CA}$ vektorok hajlásszöge, az utóbbi helyett is az A-ból induló $\overrightarrow{AC}$ vektorra van szükség.)

13.3. Az egyenes koordinátageometriája

Az egyenes egyenletének bemutatása előtt célszerű megtárgyalni az egyenes helyzetét jellemző adatokat, ezek kapcsolatát, két egyenes párhuzamosságának, merőlegességének feltételeit. Az egyenes helyzetét jellemző adatok: az egyenes irányvektora, normálvektora, iránytangense (meredeksége), irányszöge.

Definíció

Az egyenes *irányvektora* az egyenessel párhuzamos bármely vektor, amely nem nullvektor.

Definíció

Az egyenes *normálvektora* az egyenesre merőleges bármely vektor, amely nem nullvektor.

Definíció

Az egyenes *irányszöge* az egyenes és az x-tengely pozitív iránya által bezárt előjeles szög.

Definíció

Az egyenes *iránytangense* (meredeksége) az egyenes irányszögének tangense (ha $\alpha \neq 90°$).

Megjegyzések

- Az egyenes helyzetének egyértelmű megadásához elegendő az egyenes egyik pontjának és a felsorolt jellemzők közül egynek (bármelyiknek) az ismerete.
- Az irányszög értéke $-90° < \alpha \leq 90°$, de néhány könyvben a $0° \leq \alpha < 180°$ intervallumot használják. Az y-tengellyel párhuzamos egyeneseknek az iránytangense nem értelmezhető ($\alpha = 90°$).

Két egyenes párhuzamosságának és merőlegességének feltételei (**v** az egyenes irányvektorát, **n** a normálvektorát, *m* a meredekségét, *α* az irányszögét jelöli):

Tétel

$$e \| f \Leftrightarrow \mathbf{v}_e \| \mathbf{v}_f \Leftrightarrow \mathbf{n}_e \| \mathbf{n}_f \Leftrightarrow m_e = m_f \Leftrightarrow \alpha_e = \alpha_f$$

Tétel

$$e \perp f \Leftrightarrow \mathbf{v_e} \perp \mathbf{v_f} \Leftrightarrow \mathbf{n_e} \perp \mathbf{n_f} \Leftrightarrow m_e = -\frac{1}{m_f} \Leftrightarrow |\alpha_e - \alpha_f| = 90°.$$

Megjegyzés

Ha az egyenesek párhuzamosak az y-tengellyel, meredekségük nem értelmezhető.

Példa

Adott egy egyenes két pontja: $A(x_1; y_1)$ és $B(x_2; y_2)$. Adjuk meg az egyenes két irányvektorát, két normálvektorát, meredekségét, irányszögét!

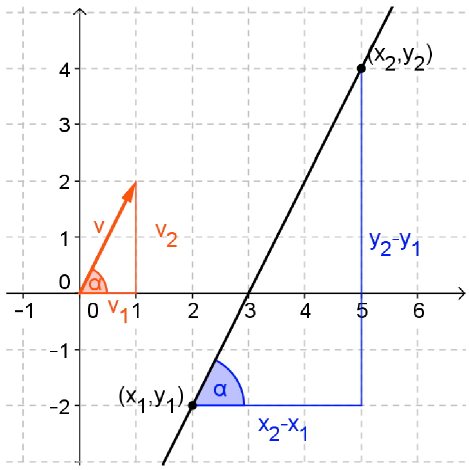
Megoldás

Az egyenes egyik irányvektora az $\overrightarrow{AB}\left(v_1; v_2\right)$ vektor, koordinátái: $v_1 = x_2 - x_1 \quad v_2 = y_2 - y_1$, másik irányvektora ennek bármely (0-tól különböző) számszorosa, pl.: $\left(2v_1; 2v_2\right)$. Normálvektort ad meg az irányvektor 90°-os elforgatottja, illetve annak 0-tól különböző skalárszorosai, pl. $\left(v_2; -v_1\right)$ és $\left(3v_2; -3v_1\right)$. Meredeksége: $m = \frac{v_2}{v_1}$,

irányszöge a $\mathrm{tg}\alpha = m$ egyenletből megadható.

Megjegyzések

- Hangsúlyozzuk, hogy egy egyenesnek végtelen sok irányvektora és normálvektora létezik, míg a meredekség és az irányszög egyértelmű. Nézzünk olyan példát is, amikor nem értelmezhető az iránytangens!
- Az egyenes meredekségének fogalmával 9. évfolyamon a lineáris függvények vizsgálatakor találkoztak a diákok. Összekapcsolhatók az akkori ismeretek és a trigonometriából korábban tanultak az új fogalmakkal (*2. ábra*): $m = \mathrm{tg}\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



2. ábra

Az egyenes egyenletei

A koordinátasíkon a pontokat számpárokkal adjuk meg, görbéket (egyeneseket) pedig olyan egyenletekkel, amelyet az alakzatra illeszkedő pontok koordinátái kielégítenek, más pontok koordinátái pedig nem.

Attól függően, hogy az egyenesnek mely adatait ismerjük, különböző egyenleteket írhatunk fel: az egyenes normálvektoros egyenletét, irányvektoros egyenletét, iránytényezős egyenletét, tengelymetszetes egyenletét, paraméteres vektoregyenletét, két pontra illeszkedő egyenes egyenletét. Természetesen a különböző felírási módok ugyanahhoz az $ax + by = c$ egyenlethez vezetnek. Középiskolában általában a normálvektoros egyenletet szokás levezetni és használni.

Tétel

A $P_0(x_0; y_0)$ pontra illeszkedő, $\mathbf{n}(A; B)$ normálvektorú egyenes egyenlete: $Ax + By = Ax_0 + By_0$.

Megjegyzés

Mindenképpen érdemes az iránytényezős alakot is felírni. Egyrészt azért, mert visszautalhatunk a 7-9. évfolyamon tanultakra, amikor az egyenessel, mint a lineáris függvény grafikonjával dolgoztunk. Másrészt a későbbiekben az emelt szinten tanulók a differenciálszámításban fogják ezt az alakot használni.

Tétel

A $P_0(x_0; y_0)$ pontra illeszkedő, m meredekségű egyenes egyenlete: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

Megjegyzés

Ez az egyenlet a konstansok egy oldalra rendezésével az ismert $y = mx + b$ alakba írható.

Az egyenes egyenletének levezetését követően mindenképpen mutassunk olyan feladatokat, amelyek az egyenlet használhatóságának megértését segítik. Például: különböző kiindulási adatokból egyenes egyenletét felírni; adott pontokról eldönteni, hogy illeszkednek-e valamely megadott egyenesre; adott egyenes egyenletéből bizonyos tulajdonsággal rendelkező vagy tetszőleges pontokat leolvasni; adott egyenes egyenletéből normálvektorát, irányvektorát, meredekségét megadni; egyenlet alapján egyenest ábrázolni. Ha már ilyen feladatokat önállóan meg tudnak oldani a tanítványaink, továbbléphetünk egy fokkal összetettebb feladatokra.

Példák

(1) A koordinátatengelyek mely pontjai vannak egyenlő távol az A(7; 5)és a B(-4; 6) pontoktól?

(2) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a P(5; 3) ponton és az $y = 2x - 3$ egyenletű a.) egyenessel párhuzamos, b.) egyenesre merőleges!

(3) Ábrázolás nélkül állapítsuk meg, hogy a következő egyenesek között melyek párhuzamosak vagy merőlegesek!

$e: 3x + 5y = 1 \quad f: 4x - 5y = 12 \quad g: 5x - 6y = 30 \quad h: 2x + 3y = 5$

$i: 8x - 10y = 7 \quad j: y = \frac{5}{3}x + 4 \quad k: y = -\frac{2}{3}x - 6 \quad l: 12x + 10y = 8$

(4) Írjuk fel az ABC háromszög oldalegyeneseinek, oldalfelező merőlegeseinek, magasságvonalainak, súlyvonalainak egyenletét, ha A(-3; 0), B(5; 0), C(3; 6)!

Megjegyzés

A normálvektor és az irányvektor fogalmának megértése nem megy mindig egyszerűen, a diákok egy része hajlamos keverni a kettőt. A fenti példákban ezek tisztázására is adódik alkalom. Az (1) példa megoldásához fel kell ismerni, hogy egy szakaszfelező merőleges egyenes egyenletét kell felírni, és a tengelymetszeteit kiszámolni. A példa lehetőséget ad az ismétlésre. A (2) és a (3) példában az egyenesek egyenleteiből le kell olvasni a helyzetüket jellemző adatokat, majd felhasználni a párhuzamosság, illetve merőlegesség feltételeit. A (2) feladat megoldása során rámutathatunk arra, hogy a vektor és az egyenes kölcsönös helyzetétől függően ugyanaz a vektor lehet irányvektor és normálvektor is. A (4) példában feleleveníthetjük a háromszög nevezetes vonalairól tanultakat, majd a különböző adatokkal megadott egyenesek egyenleteit kell felírni.

Két egyenes metszéspontja

Ha tisztában vagyunk az egyenes egyenletének fogalmával, könnyen megérthető, hogy két egyenes metszéspontjának koordinátáit az egyenletükből álló egyenletrendszer megoldása adja. A közös pont ugyanis mindkét alakzatra illeszkedik, tehát koordinátái mindkét egyenletnek megoldásai. Ugyanez a gondolatmenet alkalmazható bármely két alakzat (egyenes, kör, parabola stb.) metszéspontjainak kiszámítására.

Példa

Bizonyítsuk be, hogy az *ABC* háromszög körülírt körének középpontja, magasságpontja és súlypontja egy egyenesre illeszkedik, ha *A*(-3; 0), *B*(5; 0), *C*(3; 6)!

Megjegyzés

A példa kapcsán beszélhetünk a háromszög Euler-egyeneséről.

Példa

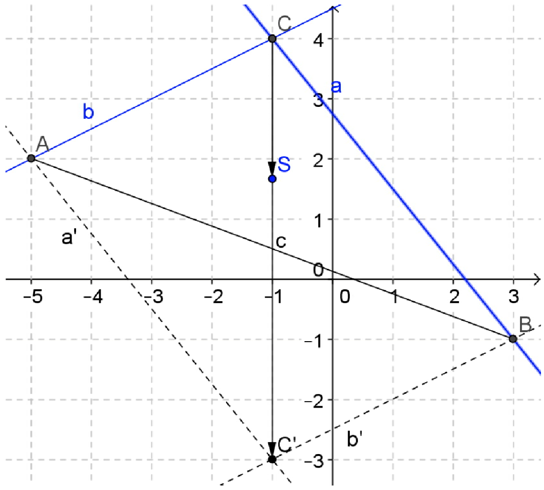
Egy háromszög két oldalegyenesének egyenlete $5x+4y-11=0$ és $x-2y+9=0$. Súlypontjának koordinátái $\left(-1;\frac{5}{3}\right)$. Írjuk fel a három csúcspont koordinátáit!

Megoldás

Kétféle megoldást mutatunk.

(1) Síkgeometriai ismeretek felhasználásával, a szerkesztési eljárás lépéseit követve dolgozunk. A *3. ábra* jelöléseit használjuk: adott az *a*, *b* oldalegyenes és az *S* súlypont. A szerkesztés elve a következő: a háromszöget bármely oldalának felezőpontjára tükrözve paralelogrammát kapunk. A paralelogramma csúcsai közül három az eredeti háromszögnek is csúcsa. A szerkesztés lépései tehát a következők: 1.) meghatározzuk a két

egyenes metszéspontját; 2.) megszerkesztjük a paralelogramma *C*-ből induló átlóját, ennek hossza a *CS* távolság háromszorosa; 3-4.) a kapott *C'* ponton keresztül párhuzamost húzunk *a*-val és *b*-vel, 5-6.) a párhuzamosok és a megadott egyenesek metszéspontjai jelölik ki a hiányzó csúcsokat.



3. ábra

A fenti szerkesztési eljárás alapján a számítás lépései:

1) $a \cap b \Rightarrow C$

$$\left.\begin{aligned} 5x+4y-11&=0 \\ x-2y+9&=0 \end{aligned}\right\}$$ megoldása: $C(-1;\,4)$

2) *C'* pont megadása:

$$\overrightarrow{CS}\left(0;-\frac{7}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = 3\cdot\overrightarrow{CS} \Rightarrow \overrightarrow{CC'}(0;-7) \Rightarrow C'(-1;-3)$$

3) *C'* ponton átmenő *a* – val párhuzamos *a'* egyenes:

$$\mathbf{n}_a(5;4) \Rightarrow 5x+4y = 5\cdot(-1)+4\cdot(-3) \Rightarrow a': 5x+4y=-17$$

4) *C'* ponton átmenő *b* – vel párhuzamos *b'* egyenes:

$$\mathbf{n}_b(1;-2) \Rightarrow x-2y = -1-2\cdot(-3) \Rightarrow b': x-2y=5$$

5) $a' \cap b \Rightarrow A$

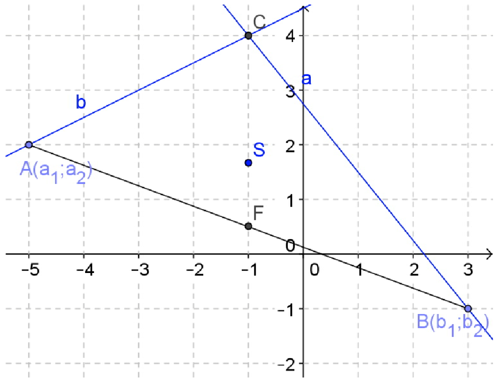
$$\left.\begin{aligned} 5x+4y&=-17 \\ x-2y&=-9 \end{aligned}\right\}$$ megoldása: $A(-5;\,2)$

6) $b' \cap a \Rightarrow B$

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=5 \\ 5x+4y&=11 \end{aligned}\right\} \quad \text{megoldása: } B(3;\ -1).$$

A keresett csúcsok: $A(-5;\ 2)$, $B(3;\ -1)$, $C(-1;\ 4)$.

(2) A feladatot a koordinátageometriában megismert összefüggések alapján (algebrai gondolatmenetet követve) oldjuk meg. (*4. ábra*)



4. ábra

1) $a \cap b \Rightarrow C$

Az előző megoldásban ismertetett módon. $C(-1;\ 4)$

2) $F(f_1;f_2)$ oldalfelező pont kiszámítása.

Felhasználjuk, hogy S harmadoló pontja az FC szakasznak:

$$-1=\frac{2f_1+(-1)}{3} \qquad \frac{5}{3}=\frac{2f_2+4}{3} \Rightarrow F\left(-1;\frac{1}{2}\right)$$

3) Felhasználjuk, hogy az A csúcs illeszkedik a b egyenesre, a B csúcs az a-ra

$A(a_1;a_2)$ illeszkedik az $x-2y+9=0$ egyenletű egyenesre, ezért, $A\left(a_1;\frac{a_1+9}{2}\right)$

$B(b_1;b_2)$ illeszkedik az $5x+4y-11=0$ egyenletű egyenesre, ezért $B\left(b_1;\frac{11-5b_1}{4}\right)$

4) Felhasználjuk, hogy az F pont az AB felezőpontja.

$$-1=\frac{a_1+b_1}{2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{\frac{11-5b_1}{4}+\frac{a_1+9}{2}}{2} \Rightarrow a_1=-5, \quad b_1=3 \Rightarrow A(-5;\ 2)$$

és $B(3; -1)$.

Két egyenes metszéspontja kiszámításának ismeretében meghatározhatjuk pont és egyenes távolságát is. Érdemes megmutatni és használni az erre vonatkozó képletet, mert ez lerövidíti és megkönnyíti a feladatmegoldást.

Tétel

A $P_0(x_0; y_0)$ pontnak az $e: Ax+By+C=0$ egyenestől való távolsága:

$$d(P_0,e)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Példa

Számítsuk ki az $A(-2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(2; 4)$ csúcsokkal megadott ABC háromszög területét!

Megoldás

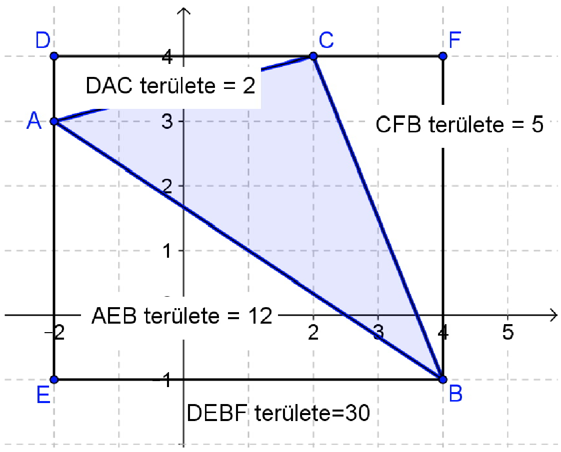
A megoldásra most is több lehetőség kínálkozik.

(1) Kiszámoljuk a háromszög egyik oldalának és a hozzá tartozó magasságnak a hosszát. $\overrightarrow{AB}(6;-4) \Rightarrow c=AB=\sqrt{52}$, az AB oldal egyenlete: $4x+6y=10$.

$$m_c=d(C,AB)=\frac{8+24-10}{\sqrt{52}}=\frac{22}{\sqrt{52}}$$

$$\Rightarrow T=\frac{c\cdot m_c}{2}=\frac{\sqrt{52}\cdot\frac{22}{\sqrt{52}}}{2}=11.$$

(2) A háromszöget befoglaló téglalap területéből levonjuk a külső derékszögű háromszögek területét (*5. ábra*).



5. ábra

$T_{ABC} = 30 - (12 + 2 + 5) = 11$

(3) Kiszámoljuk a háromszög két oldalának hosszát, és az ezek által bezárt szöget (pl. vektorok skaláris szorzatából), majd használjuk a $T = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ területképletet.

(4) Kiszámoljuk a háromszög mindegyik oldalát, majd alkalmazzuk a Heron-képletet.

Megjegyzés

Ha van lehetőség rá, érdemes a tanulókkal megismertetni és használni a GeoGebra programot. Nemcsak szemléltetésre használhatjuk, hanem az alakzatok egyenletének, pontok koordinátáinak és egyéb számításoknak az ellenőrzésére is.

13.4. A kör koordinátageometriája

A kör egyenlete

A kör definíciójából kiindulva könnyen levezethető a kör egyenlete.

Tétel

A $C(u;v)$ középpontú r sugarú kör egyenlete: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$.

A kör egyenletének levezetését követően mindenképpen mutassunk olyan feladatokat, amelyek az egyenlet használhatóságának megértését segítik. Például: a kör egyenletéből középpontját, sugarát megadni; adott pontokról eldönteni, hogy adott körhöz képest milyen helyzetűek; adott kör egyenletéből bizonyos tulajdonsággal rendelkező vagy tetszőleges pontokat leolvasni; kör egyenletét felírni átmérő vagy középpont és kerületi pont ismeretében; egyenlet alapján kört ábrázolni.

Megjegyzés
A feladatokat úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egyúttal korábban tanult dolgokat átismételjünk. Erre szolgálhatnak az alábbi, valamivel összetettebb példák, amelyekben a húrnégyszögekről, a Thalesz-tételről és a háromszög köré írt körről tanultakat frissíthetjük fel.

Példák
(1) Lehet-e egy húrnégyszög négy csúcsa a következő négy pont: (0; -1), B(4; 0), C(4; 4) és D(-2; 3)?
(2) Adjuk meg az ordinátatengely azon pontjait, amelyekből az AB szakasz derékszögben látszik, ha A(-3; -1) és B(8; 2)!
(3) Határozzuk meg az A(-2; 3), B(4; -1), C(2; 4) csúcsokkal megadott ABC háromszög köré írt körének egyenletét!

Ezután érdemes a másodfokú kétismeretlenes egyenlet és a kör egyenletének kapcsolatával foglalkozni.

Példa
Az alábbi egyenletek közül melyik lehet kör egyenlete? Adjuk meg a körök középpontját és sugarát!

a) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 24 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 10x = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2xy - 30 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 12x + 4y - 12 = 0$

e) $4x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 16 = 0$

Megjegyzés
A feladatok megoldásához a 9. évfolyamon megismert teljes négyzetté kiegészítés módszerét használjuk. A konkrét példák vizsgálatából általánosan megfogalmazhatjuk a feltételeket.

Tétel

Az $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ egyenlet akkor és csak akkor kör egyenlete, ha

$A \neq 0,\ A = B,\ C = 0,\ D^2 + E^2 - 4AF \geq 0$.

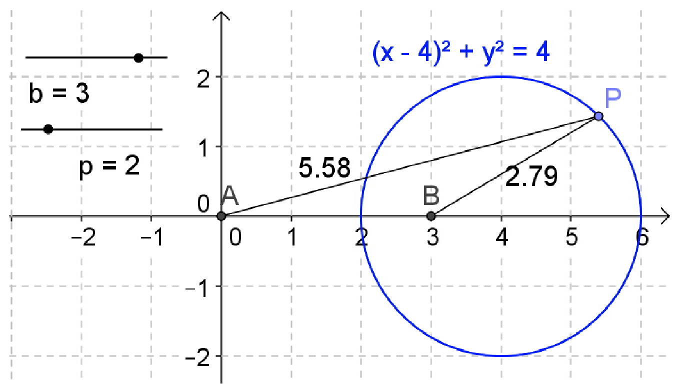
Példa

Határozzuk meg a sík azon P pontjainak halmazát, amelyeknek adott A és B pontoktól mért távolságának aránya $p : 1$! ($p > 0$)

Megoldás

Helyezzük el a pontokat a koordinátasíkon (*6. ábra*)! Az általánosság sérelme nélkül megtehetjük, hogy a pontok koordinátáit úgy választjuk meg, hogy a számolás minél egyszerűbb legyen.

Pl. legyen $A(0;0)$, $B(b;0)$, $P(x;y)$. $PA = \sqrt{x^2 + y^2}$, $PB = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$, így a $PA : PB = p$ feltétel a következő egyenlethez vezet: $(p^2 - 1)x^2 + (p^2 - 1)y^2 - 2bp^2x + b^2p^2 = 0$,ami $p \neq 1$ esetben egy kör egyenlete. (Apollóniusz-kör).



6. ábra

A feladat speciális esete: $p = 1$, ekkor a nevezetes ponthalmazoknál 9. évfolyamon megismert szakaszfelező merőleges egyenest kapjuk.

Megjegyzés
A GeoGebra szoftver alkalmazásának előnye, hogy az adott pontok távolságának (b értékének) és a p paraméternek a változtatásával megfigyelhető a megoldáshalmaz változása.

Megjegyzés
A koordinátageometria remek eszköz elemi geometriai feladatok megoldásához is. Az elemi geometriában a bizonyítási vagy ponthalmazos feladatok meglehetősen nehezek lehetnek, megoldásukhoz jó ötletekre és az ismeretek magas szintű alkalmazására van szükség. A koordinátageometriai módszer ehhez képest több számolással, de könnyebben célhoz vezet.

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

Példa
Állapítsuk meg, milyen helyzetű az $(x-5)^2+(y-2)^2=50$ egyenletű kör és a $3x-4y-32=0$ egyenletű egyenes! Ha van közös pontjuk, határozzuk meg a közös pont(ok) koordinátáit!

Megjegyzés
Az egyenes és a kör kölcsönös helyzetének eldöntésére két módunk van. Az egyik, hogy megállapítjuk a kör középpontjának az egyenestől mért távolságát, és ezt az értéket összehasonlítjuk a sugár hosszával. Ha a sugár nagyobb, akkor metszik egymást, ha a sugárral egyenlő a távolság, érintik egymást, egyébként nincs közös pontjuk. A másik módszer közvetlenül a közös pontok meghatározása, amelyet az egyeneseknél említett módon, a két alakzat egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásával kaphatunk. Az egyenletrendszer most másodfokú egyenletre vezet, melynek diszkriminánsa megadja a közös pontok számát, a megoldások pedig a közös pontok koordinátáit.

Példák
(1) Írjuk fel az $(x-4)^2+(y-5)^2=10$ egyenletű kör (7; 6) pontjában húzott érintő egyenletét!
(2) Írjuk fel az $(x-4)^2+(y-5)^2=10$ egyenletű körhöz a (9; 10) pontból húzott érintő egyenletét!

(3) Írjuk fel az $(x-4)^2+(y-5)^2=10$ egyenletű kör $x+3y=6$ egyenletű egyenessel párhuzamos, illetve arra merőleges érintőinek egyenletét!

Megoldás

Az (1) példa megoldásához annyit kell felhasználni, hogy az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre. Az eredmény: $3x+y=27$.

A (2) példánál a szerkesztési eljárást érdemes követni: a középpont és a külső pont meghatározzák egy Thalesz-kör átmérőjét, ennek az eredeti körrel való metszéspontjai lesznek az érintési pontok. Az érintési pontra és az adott pontra illeszkedő egyenes a keresett érintő. Megoldások: $x-3y=-21, \quad 3x-y=17$.

A (3) példa megoldásának lépései (a szerkesztés menetét követve) a párhuzamos érintők meghatározásához: a kör középpontjából az adott egyenesre merőlegest állítunk, kiszámoljuk a kapott egyenes és a kör metszéspontjait, ezeken át az eredeti egyenessel párhuzamost húzunk. Az adott egyenesre merőleges érintők felírása hasonlóan történik: először az adott egyenessel párhuzamost húzunk a kör középpontján át, innen a lépések ugyanazok, mint az előbb. A keresett érintők:

$x+3y=29, \quad x+3y=9, \quad 3x-y=-3, \quad 3x-y=17$.

Megjegyzés

A fenti példák közül az első az, amelynek megoldása középszintű követelmény. A másik két feladat megoldható – lényegesen több számolással - tisztán algebrai úton is. Az érintő iránytényezős egyenletét felírjuk paraméteresen (pl. a (3) feladatban a párhuzamos érintő: $x+3y=c$), majd felhasználjuk, hogy a két alakzatnak egy közös pontja pontosan akkor van, ha az egyenletükből álló egyenletrendszernek egy megoldása van, azaz a kapott másodfokú egyenlet (a (3) példában a másodfokú egyenlet: $10y^2+(-6c+14)y+c^2-8c+31=0$) diszkriminánsa 0. A diszkriminánsra szabott feltételből kapjuk a paraméter értékét.

Két kör kölcsönös helyzete

Két kör közös pontjait a két kör egyenletéből álló másodfokú egyenletrendszer megoldása adja. Ha a metszéspontok számából következtetünk a körök helyzetére, gondolnunk kell arra, hogy 1 közös pont esetén a körök kívülről vagy belülről is érinthetik egymást, illetve ha a két körnek nincs közös pontja, a nagyobb kör tartalmazhatja a kisebbet. Ezeket a helyzeteket a középpontok távolságának és a sugaraknak az ismeretében állapíthatjuk meg.

Példa

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x-tengelyt, és érinti az $(x+1)^2+(y-2)^2=100$ egyenletű kört is a $P(7;8)$ pontjában!

Megoldás

Keressük a kör *C(u; v)* középpontját és *r* sugarát (*7. ábra*).

Felhasználjuk, hogy ha két kör érinti egymást, akkor az érintési pont illeszkedik a körök középpontját összekötő egyenesre, tehát *C*, *P* és *O*(-1; 2) egy egyenesen vannak. *PO* egyenes egyenlete: $-6x+8y=22$. A feltétel szerint $v > 0$.

A kör érinti az x-tengelyt $\Rightarrow v=r$ (1)

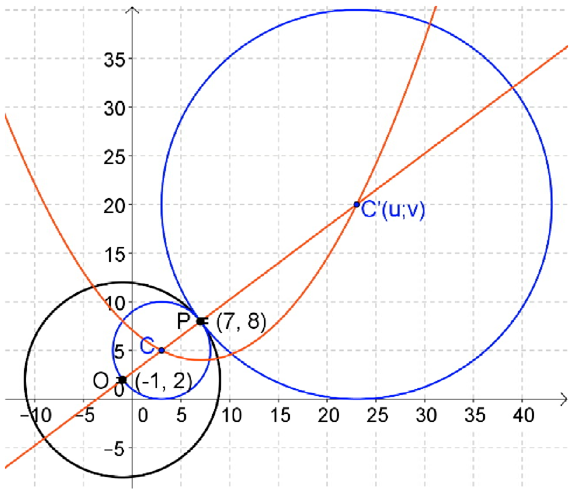
P illeszkedik a körre$\Rightarrow (7-u)^2+(8-v)^2=r^2$ (2)

C illeszkedik *OP* egyenesre$\Rightarrow -6u+8v=22$ (3)

A három egyenletből álló egyenletrendszer *(u;v)* megoldásai: (23; 20) és (3; 5). Tehát két ilyen kör van: $(x-23)^2+(y-20)^2=400$ és $(x-3)^2+(y-5)^2=25$.

Megjegyzés

A parabola egyenletének ismeretében másképp is megoldható a feladat. A keresett középpont egyenlő távolságra van a *P* ponttól és az x-tengelytől, vagyis egy olyan parabolára illeszkedik, amelynek fókuszpontja *P,* vezéregyenese az x-tengely. Az (1) és (2) egyenlet helyett a parabola egyenletét használhatjuk: $y=\frac{1}{16}(x-7)^2+4$. A *C* pont a parabola és az *OP* egyenes metszéspontja, koordinátáit e két alakzat egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk.



7. ábra

13.5. A parabola

A nevezetes ponthalmazok kapcsán – kilencedikben – általában a parabola fogalma is szóba kerül. A görbe ezután 9-10. évfolyamon a másodfokú függvények grafikonjaként kerül elő. Tizenegyedik évfolyamon van alkalom arra, hogy a kétféle megközelítés közötti kapcsolatot megvilágítsuk: a ponthalmazként megfogalmazott definíció alapján levezethető a parabola tengelyponti egyenlete. Az y-tengellyel párhuzamos tengelyű parabolák egyenletével már a függvényeknél találkoztak a tanulók, ezek analógiájára felírhatók az x-tengellyel párhuzamos parabolák egyenletei. Érdeklődőbb diákoknak érdemes feladatokat adni a parabola érintőjére, parabolák és egyenesek vagy két parabola metszéspontjait számolására. Mindezek előkészíthetik a differenciálszámítás és az integrálszámítás témakörökben sorra kerülő feladatokat. A parabola egyenletének ismerete azonban csak emelt szintű követelmény, így ezzel ebben a fejezetben részletesebben nem foglalkozunk.

Irodalom

Bárd, Á., Frigyesi, M., Lukács, J., Major, É., Székely, P. & Vancsó, Ö. (2006): *Készüljünk az érettségire matematikából emelt szinten.* Budapest: Műszaki Kiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Csúri, J., Duró, L-né, dr.Gyapjas, F-né, dr.Kántor, S-né, & dr.Pintér, L-né (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény I.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bartha, G., Bogdán, Z., Duró, L-né, dr.Gyapjas, F-né, Hack, F., dr.Kántor, S-né & dr.Korányi,E. (2002): *Matematikai feladatgyűjtemény II*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Bogdán, Z.(1990): *Matematika feladatok – ötletek – megoldások II.* Budapest, Tankönyvkiadó.

Czapáry, E., Csete, L., Hegyi, Gy., Iványiné, H. Á. & Reiman I. (2006): *Gyakorló és érettségi felkészítő feladatgyűjtemény III.* Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó.

Érettségi vizsgatárgyak feladatlapjai, javítási-értékelési útmutatói, Oktatási Hivatal. http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent/!DARI_ErettsegiFeladatsorok/oh.php?id=erett_ut_reszlet (2015. 05.20.)

Füleki, L.& Szloboda, T. (szerk.) (2005): *Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III. Geometriai feladatok gyűjteménye*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Gádor E., Gyapjas F., Hárspatakiné D.V., Korányi E., Pogáts F., Reiman I. & Scharnitzky V. (1990): *Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából*. Budapest, Tankönyvkiadó

Gerőcs, L., Orosz, Gy., Paróczay, J. & Szászné Simon, J. (2009): *Matematika. Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Hortobágyi, I., Marosvári, P., Pálmay, L., Pósfai, P., Siposs, A. & Vancsó, Ö. (é.n.):*Egységes érettségi feladatgyűjtemény – Matematika I,II.* Piliscsaba: Konsept-H Kiadó.

Juhász, I., Orosz Gy., Paróczay J. & Szászné Simon J. (2010): *Matematika 9. Az érthető matematika*, Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J. & Vincze I. (2004): *Sokszínű matematika 11.*, Szeged: Mozaik Kiadó.

Pólya, Gy. (1971): *A problémamegoldás iskolája. II. kötet*, Budapest: Tankönyvkiadó.
Pósa L. (1999): *Összefoglalás*. Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
Róka S. (2000): *2000 feladat az elemi matematika köréből*. Budapest, Typotex Kiadó.
Szendrei J. (2004): *Gondolod, hogy egyre megy?* Szeged, Typotex Kiadó.

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE